Composer et décomposer les premiers nombres

Histoire et enjeux des matériels exposés en 2023 au

Musée de l'école

de Chartres et d'Eure-et-Loir

Gonzague Jobbé-Duval
Professeur des écoles
novembre 2023

Sommaire

A. Pourquoi cette exposition ?

Une exposition raisonnée de matériels d'enseignement élémentaire des mathématiques est chose très rare. L'excellent Musée national de l'éducation (Munaé, à Rouen) par exemple, n'a consacré à ce thème aucune de ses 120 expositions temporaires. Peut-être parce qu'il n'existe pas de synthèse universitaire sur l'histoire de ces matériels et quasiment pas d'études particulières en dehors de celles concernant le boulier.

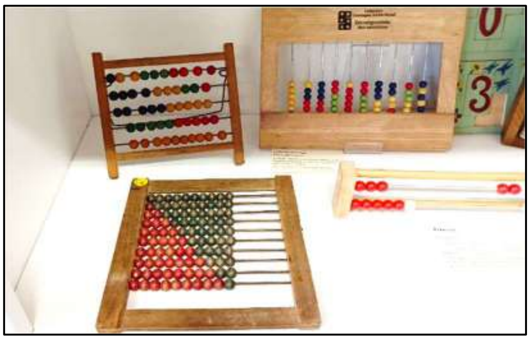
Par ailleurs la « décomposition des nombres » et l'étude de leurs « relations internes » - sont revenues au programme de nos écoles dès la maternelle depuis 2015 après une éclipse de 45 ans. L'exposition eut pour titre provisoire : « Les nombres en relations ».

Enfin 2023 est le centenaire des « plaquettes d'initiation sensorielle au calcul », créées par l'ancienne inspectrice générale Suzanne Herbinière-Lebert, qui retrouvent le chemin des classes depuis quelques années sous d'autres noms. Le Musée de l'école en expose un très rare ensemble.

Comment ?

Le Musée de l'école, à Chartres, dont l'association de soutien est présidée par Madame Marie-Françoise Soulier, souhaitait mettre en valeur ses fonds de matériels mathématiques. Madame Nadia Chaboche, inspectrice de l'Education Nationale et membre du C.A. de l'association, avait repéré un professeur des écoles de sa circonscription qui avait enquêté sur l'histoire et les enjeux des plaquettes, dés et barres d'initiation au calcul. Il lui apprit qu'il était aussi collectionneur et c'est ainsi que fut décidée une exposition temporaire, du 27 février au 11 août 2023, avec des matériels issus des riches réserves du Musée, et d'autres venus d'Allemagne, des Etats-Unis, de Belgique, du Royaume-Uni et des Pays-Bas.

Entre les outils, les manuels et les objets manipulables par le public, il y avait matière à occuper deux salles de classe. Grâce à la générosité de la ville de Chartres, le musée est promis à des locaux plus vastes mais pour cette exposition une sélection des collections est présentée dans les vitrines de manière ramassée, avec l'affichage de grands panneaux synthétisant l'histoire et les débats. Pour approfondir la connaissance d'un matériel, de nombreux petits panneaux sont disponibles sur présentoir et quatre jeux sont proposés à hauteur d'enfant.



L'exposition au Musée de l'école de Chartres et d'Eure-et-Loir

B. Dans les programmes (2015-2021)

Programme pour la maternelle (2021) :

« À leur arrivée à l'école maternelle [...] s'ils savent énoncer les débuts de la suite numérique, cette récitation ne traduit pas une véritable compréhension des quantités et des nombres. [...]

La **maîtrise de la décomposition des nombres** est une condition nécessaire à la construction du nombre. [...] Au cycle 1, la construction des quantités jusqu'à dix est essentielle. [...] Entre deux et quatre ans, stabiliser la connaissance des petits nombres (jusqu'à cinq) demande des activités nombreuses et variées portant sur la décomposition et recomposition des petites quantités (trois c'est deux et encore un ; un et encore deux ; quatre c'est deux et encore deux ; trois et encore un ; un et encore trois), la reconnaissance et l'observation des constellations du dé, la reconnaissance et l'expression d'une quantité avec les doigts de la main, la correspondance terme à terme avec une collection de cardinal connu. Ultérieurement, au-delà de cinq, la même attention doit être portée à l'élaboration progressive des quantités.

Grâce à la pratique régulière d'exercices de passage d'un nombre à un autre, (dans des jeux), les enseignants encouragent les élèves à comprendre que les nombres consécutifs sont liés par l'itération de l'unité (trois, c'est deux et encore un). Au départ, l'accent est mis sur les tout petits nombres de 1 à 4. Après quatre ans, les activités de décomposition et recomposition s'exercent sur des quantités jusqu'à dix. [...] »

Programme pour le cycle 2 (2020) :

« **L'étude de relations internes aux nombres** : comprendre que le successeur d'un nombre entier c'est « ce nombre plus un », décomposer/recomposer les nombres additivement, multiplicativement, en utilisant les unités de numération (dizaines, centaines, milliers), changer d'unités de numération de référence, comparer, ranger, itérer une suite (+ 1, + 10, + n), etc. »

C. Dès 1887 : mettre les nombres en relation

Dès l'époque de Jules Ferry, le *Dictionnaire de pédagogie* de Ferdinand Buisson[1] avait la même préoccupation.

1887 : « Connaitre les nombres : connaître un objet, ce n'est pas seulement savoir son nom, c'est l'avoir vu sous toutes ses formes, dans tous ses états, dans **ses diverses relations** avec les autres objets ; c'est pouvoir le comparer avec d'autres, le suivre dans ses transformations, le saisir et le mesurer, **le composer et le décomposer à volonté** »[2].

En 1911 le Dictionnaire promeut un matériel précis : « L'un des procédés les plus féconds pour exercer l'enfant à compter, pour lui donner une idée juste de la numération et le préparer au système métrique, est l'emploi des cubes assemblables de « l'Initiateur mathématique » de M. Camescasse, qui présentent le grand avantage de mettre des objets dans les mains des enfants eux-mêmes. [...] Ici encore, en employant judicieusement les cubes assemblables de M. Camescasse, on arrivera à bien **faire saisir aux élèves la dépendance des diverses unités entre elles. C'est dans cette dépendance des diverses unités que consiste tout notre système de numération.** »[3]

Voici la photo du matériel originel (éd. Hachette) breveté en 1910 par le Français **Jacques Camescasse** (1869-1941), comptable, libraire-papetier et militant espérantiste : un système de cubes en bois rouge ou blanc assemblables par toutes leurs faces au moyen de réglettes en acier. « L'Initiateur mathématique », mettait en pratique *L'Initiation mathématique* du mathématicien Charles-Ange Laisant. Les cubes pouvaient être assemblés en barres de 10, en plaques de 100 ou en cubes de 1000 et pouvaient adopter de nombreuses configurations grâce aux deux couleurs des cubes.

« L'Initiateur mathématique » de Jacques Camescasse (Hachette, 1910)

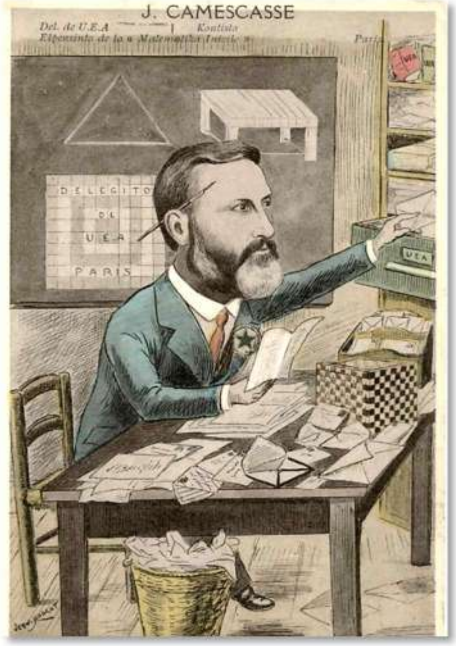
[1] Directeur de l'Enseignement primaire en France de 1879 à 1896

[2] BUISSON Ferdinand, « Calcul intuitif » in BUISSON Ferdinand (dir.), *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, 1887. Il s'inspire ici explicitement du « calcul intuitif » de l'Allemand Grube.

[3] BOURLET Carlo, « Mathématiques », in BUISSON Ferdinand (dir.), *Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, 1911.

L'exposition présente ce matériel (photo ci-dessous avec le *Dictionnaire de pédagogie*) tel que diffusé par le mouvement Freinet avec sa Coopérative de l'enseignement laïc (C.E.L.) à partir de 1931.

« L'initiateur mathématique » de Jacques Camescasse (C.E.L.) avec deux notices et une caricature de l'auteur, appuyés sur le Nouveau dictionnaire de pédagogie de F. Buisson (1911)



Carte postale avec caricature de Jacques Camescasse en délégué de L'Association Universelle d'Espéranto

L'UNITÉ

un centimètre cube,
un millilitre.

LA DIZAINE

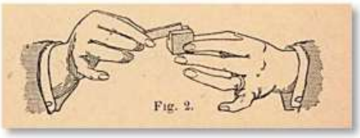
dix centimètres cubes,
un centilitre.

LA CENTAINE

cent centimètres cubes,
un décilitre,
en surface : 1 dm², etc....

LE MILLE

un décimètre cube,
mille centimètres cubes,
un litre.



Extraits de la notice de « L'initiateur mathématique » de Jacques Camescasse

Si le cube est un peu dur à enfoncer, se

Fig. 3.

servir du pouce pour appuyer fortement. (*Fig.* 4.)

Pour réunir en plaquettes carrées les di-

Fig. 4.

zaines ainsi formées, accoler celles-ci, l'une contre l'autre, en fixant sur une réglette le *premier cube de chaque dizaine* d'une façon

Fig. 5.

analogue à celles indiquées aux figures 3 et 4 pour les cubes isolés. (*Fig.* 5).

Dans cette figure 5 la réglette a été prolongée de façon à laisser voir sa position.

Les dizaines se trouvant ainsi unies par une de leurs extrémités, retourner le tout et,

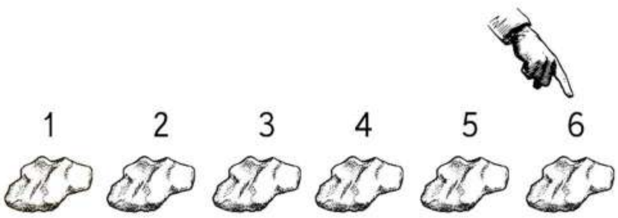
Fig. 6.

D. L'énumération : une stratégie faible

Pour composer et décomposer les nombres, quelles sont les chemins les plus directs et quels outils les favorisent ? L'exposition présente plusieurs grandes familles de matériels qui ont en commun d'éviter le comptage 1 à 1. Voici pourquoi.

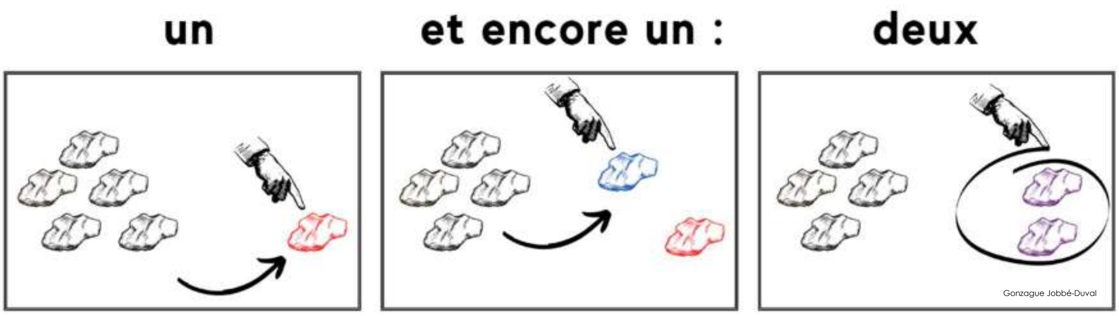
1. L'énumération peut permettre de comprendre l'itération de l'unité

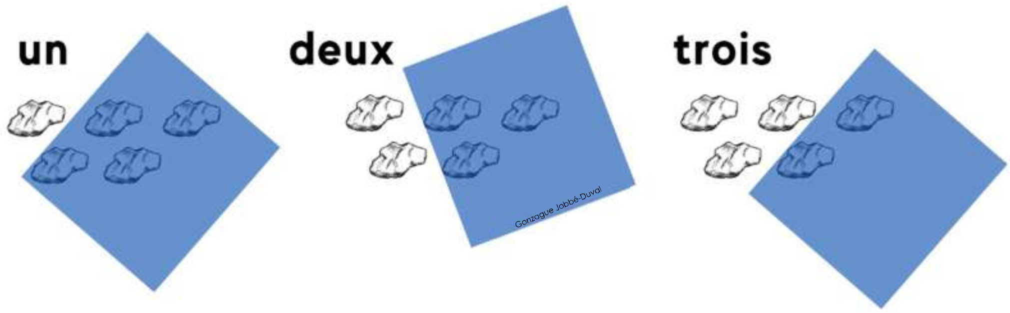
Remarquons d'abord que l'énumération telle qu'on la pratique souvent peut entrainer certains élèves au « comptage-numérotage » : en pointant successivement les unités et récitant au même rythme la comptine numérique, les élèves peuvent croire que « six » désigne le sixième élément et pas l'ensemble des six.



Comme le faisait remarquer Rémi Brissiaud dans ses conférences : à la question « combien de cailloux ? », beaucoup de jeunes enfants répondent en comptant « 1, 2, 3, 4, 5, 6 ». Et si on leur redemande « *alors* combien y en a-t-il ? », ils recommencent à numéroter « 1, 2, 3, 4, 5, 6 ». Certains appliquent néanmoins la règle apprise de répéter le dernier mot-nombre prononcé. Ils disent donc « 1, 2, 3, 4, 5, 6… 6 » mais que veut dire « 6 » pour eux ? Ont-ils accédé à la quantité ou seulement appliqué une règle pour faire plaisir à l'adulte ?

L'énumération permet pourtant un authentique dénombrement, surtout quand on théâtralise, auprès des plus jeunes et des plus faibles, que le successeur d'un nombre entier c'est « ce nombre plus un » (itération de l'unité).

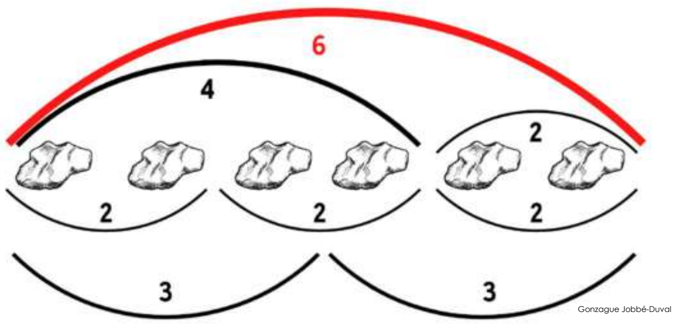




2. Mais l'énumération ne donne pas accès à toutes les « relations internes aux nombres »

Mais même bien conduite, l'énumération ne donne pas accès à toutes les « relations internes aux nombres » :

6 = 4+2 = 3+3 = 2x3 = 2+2+2 = 3x2. Etc.



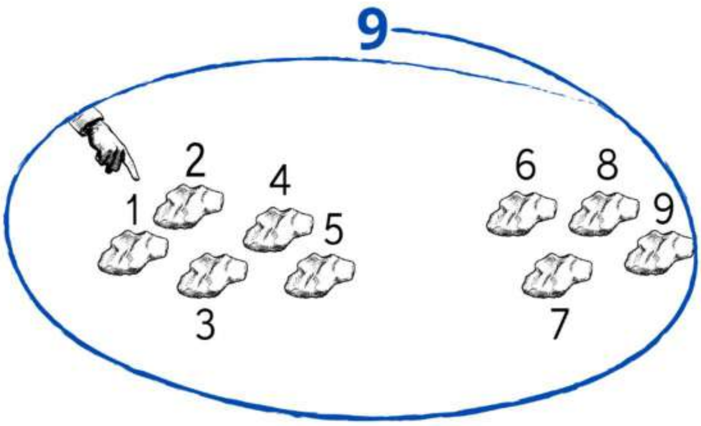
Ces relations, faudrait-il se contenter de les apprendre par cœur sans les comprendre, sans en faire l'expérience ?

Si l'enfant n'a pas accès de cette manière à la décomposition des nombres, pourrait-il néanmoins ***composer*** les nombres de manière consciente grâce à l'énumération ?

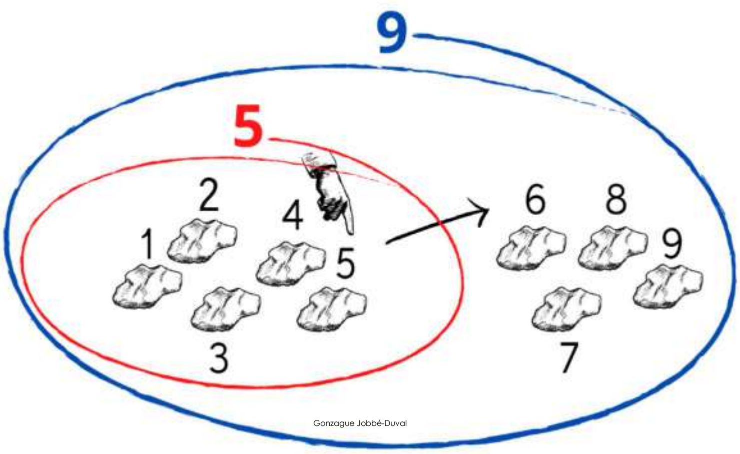
Quand il réunit deux collections par l'énumération, le jeune enfant fait-il une expérience beaucoup plus claire des relations internes aux nombres ? Certes matériellement il compose un nombre mais comprend-il ce qu'il fait ?

Regardons d'abord la situation d'un enfant devant **deux collections**.

Dans l'exemple ci-dessous l'enfant compte les éléments des deux collections comme si c'était une seule collection. Il compte 9 éléments.



Ou au mieux il évalue la première collection puis il « surcompte » au-delà.



Il saura donc qu'il y a 5 objets dans la première collection mais pas combien il y en a dans la deuxième. Il ne sait donc pas que 9 c'est (entre autres relations) 5+4.

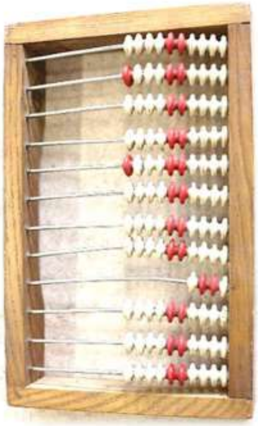
3. Une stratégie alternative : manipuler non pas chaque unité mais les collections elles-mêmes

Regardons à présent quelles propositions matérielles les pédagogues d'hier et d'aujourd'hui ont apporté pour éviter le comptage 1 à 1 et dans quelle mesure elles favorisent la stratégie de décomposition-recomposition des nombres en mettant en relation des groupes d'unités.

Nous parcourrons d'abord les outils disposant **les unités en ligne** : les bouliers et les barres. Puis nous aborderons les outils disposant **les unités de manière non-alignée**, pour donner une « image des nombres » : les dés/dominos et les plaquettes.

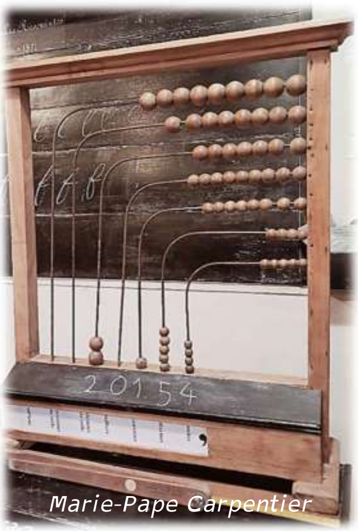
I. Les bouliers

Les bouliers sont arrivés en France par un vétéran de la campagne napoléonienne en Russie, le mathématicien français Jean Victor Poncelet. Jusqu'au début du XXe siècle les bouliers sont souvent appelés en Allemagne : « machine à calculer russe ».



C'est par rapport à ce boulier russe[4] (photo de l'exposition ci-contre) que se positionneront tous les outils didactiques d'initiation au calcul. Pour représenter le système décimal et la valeur de la position des chiffres, il attribue une valeur différente aux boules selon la position de leur tige support. On pousse une boule du rang supérieur au passage de chaque puissance de 10.

La Française Marie-Pape Carpentier (1815-1878) a popularisé en France un boulier dont le Musée de l'école, à Chartres, possède un rare exemplaire. Chaque rang supérieur est représenté par de plus grosses perles. Chaque rang compte 9 perles. Si l'on égrène les boules 1 par 1 jusqu'à 10, il faut après 9 petites boules déplacer 1 plus grosse boule du rang supérieur (et replacer au départ les 9 unités).



Marie-Pape Carpentier

Les bouliers pour jeunes enfants ont, eux, des perles toutes de même valeur, 10 par tige, et des tiges sans valeur de position dans le système décimal. Ils permettent de dénombrer jusqu'à 10, 20, 50 ou 100.

Pour composer et décomposer les nombres il faut manipuler des groupes d'unités, déplacer plusieurs boules d'un seul mouvement. Mais avec des rangées de 9 ou 10 boules identiques, **comment éviter de compter 1 à 1 ?** On ne peut en effet percevoir de manière quasi-instantanée (subitisation) que 3 objets alignés[5].

---

[4] Manipulé couché, de la droite vers la gauche. L'un des rangs compte 4 disques pour les quarts de rouble (voire un deuxième rang pour les quarts de kopeck). Les 5e et 6e disques sont colorés pour faciliter le dénombrement avec le repère 5. La perle gauche du rang des milliers et des millions est souvent d'une couleur distincte pour repérer les classes plus aisément. Sur **l'histoire des abaques et bouliers**, voir par exemple : Dominique Tournès, « Perspectives historiques sur les abaques et bouliers », *MathémaTICE*, 2016, 51. [En ligne]. Voir aussi : A. Schärling, *Compter du bout des doigts. Cailloux, jetons et bouliers, de Périclès à nos jours*, Lausanne, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2006.

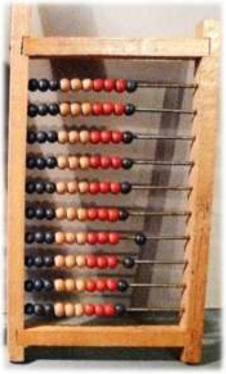
[5] D'après J.-P. Fischer (1991), mais les pédagogues anciens allaient parfois jusqu'à 4 voire 5.

A. Regrouper les boules avec des couleurs distinctes : la solution courante

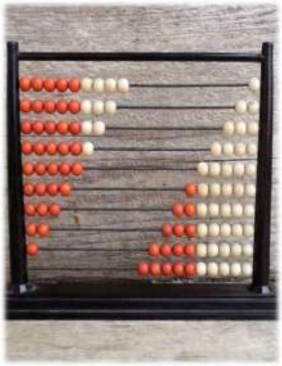
Beaucoup de pédagogues ont donc décidé de regrouper les boules avec des couleurs distinctes.

En alternant les couleurs :

par 2 (diviseur de 10) ;

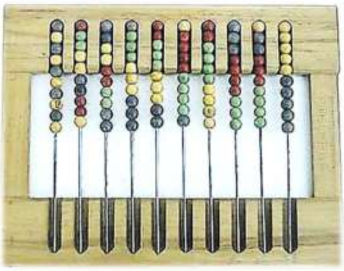


par 3 (limite de subitisation) ;

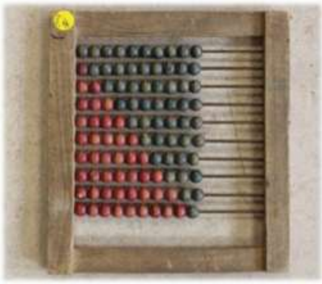


par 5 (moitié de 10).

En présentant différents groupements ou toutes les décompositions de 10 :

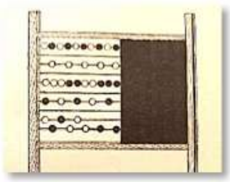


Différents groupements (France, éd. Sudel).



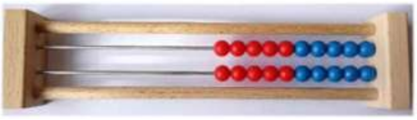
Décompositions de 10.

En constituant librement des groupes grâce à des cylindres réversibles bicolores:



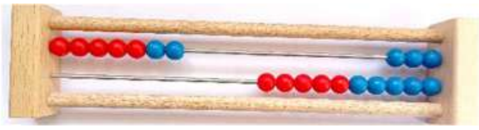
Bayerische Rechenmaschine (Allemagne)

B. L'exemple du *Rekenrek* et des « grilles de 10 », avec les repères 5 et 10



« Rekenrek »[6] est le nom néerlandais d'un boulier de deux tiges horizontales comprenant chacune 5 perles rouges et 5 perles bleues (ou blanches)[7] placées en position de départ, par convention, à droite des tiges, puis déplacées à gauche quand elles sont mises en jeu, *en prenant soin de les déplacer par groupe plutôt qu'1 par 1*. Le *rekenrek* s'appuie sur les repères 5 et 10.

Il n'est pas possible de dénombrer d'un coup d'œil 5 éléments alignés mais l'enfant s'appuie sur son expérience que chaque groupe d'une seule couleur compte 5 perles. Pour prendre 4 perles, l'enfant en prend 1 de moins que 5 ou 1 de plus que 3.



Pour prendre 7 perles il en prend 5 et 2 de plus.

La dizaine peut être représentée en ligne ou sur deux rangées.

13

12

Avec le choix des deux tiges on peut s'appuyer sur le repère 5 ou sur les doubles. Par exemple :

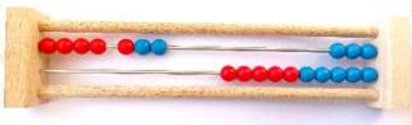
- Faisons 7. Poussez 4 boules en haut. Combien en faudra-t-il en bas ?

- Je sais que 4 + 4 = 8. Ce sera donc 1 de moins (4 + 3).

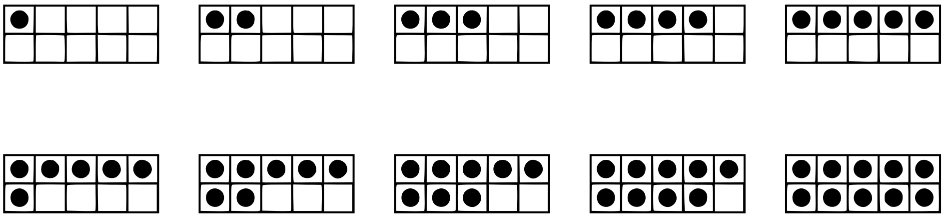
---

[6] Voir Adrian Treffers, "Rekentof twintig met het rekenrek", *Willem Bartjens*, 10 (1), 1990, p. 35–45.
[7] Semblable au *Rechen-Federkasten* breveté par l'Allemand Georg Krüger en 1909.

- Faisons encore 7. Poussez 4 boules en haut. Cette fois-ci combien en faudra-t-il en haut ?
- Je sais que si je bouge une boule en haut cela en fera 5 car 4+1=5. Alors il m'en faudra 2 de plus pour faire 7 car 5+2=7. Je pousse donc 3 boules de plus en haut.



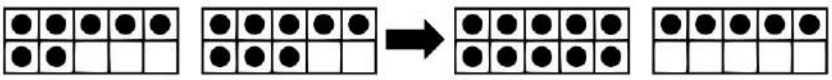
Le principe d'unités déplaçables alignées et organisées autour des repères 5 et 10 se retrouve dans ce qui est appelé aujourd'hui « grille de 10 » (*10 frame* en anglais[8]).



Le musée présente un matériel solide qui fonctionne de cette manière : « Calcul-dizaines » (« matériel Martin »), édité par le Centre d'Activités Pédagogiques en 1954. Ce sont des plaques en bois comportant 10 trous (une version à 5 trous existe aussi) accompagnés de cylindres en hêtre de 3 couleurs (bleu-jaune-rouge) à insérer dans les trous en complétant d'abord une rangée de 5.

Martin (C.A.P.)

En Allemagne des plaques de ce type sont parfois utilisées en deux exemplaires, ce qui les rapprochent du *Rekenrek* et permet notamment une présentation intéressante du passage de la dizaine lors de l'addition. Pour 7 + 8, trois jetons sont prélevés physiquement ou mentalement de la deuxième grille comprenant 8 jetons pour compléter la première, si bien que l'addition se présente maintenant comme 10 + 5 (cf. illustration ci-dessous).



[8] Sur son utilisation : THOMPSON Charles S. and VAN DE WALLE John, "The Power of 10", *The Arithmetic Teacher*, Vol. 32, No. 3 (November 1984), pp. 6-11.

C. Attribuer une longueur et une couleur à chaque quantité : la solution Montessori

Maria Montessori (1870-1952) adopte encore une autre solution : **elle sort les boules et leur tige du boulier**, attribuant à chaque tige une longueur correspondant à chaque quantité de boules. Elle entend **faire manipuler aux enfants non plus chaque unité mais les collections elles-mêmes**. Chaque enfant dispose de barrettes de perles insérées sur une tige métallique aux extrémités recourbées. Mais cela seul n'éviterait pas aux élèves de compter les perles une par une. Montessori attribue donc une couleur distinctive à chaque quantité.

Perles Montessori produites en Chine en 2020

« Petit à petit l'enfant cesse de compter les perles et reconnaît les nombres par leur couleur. Il sait que la bleue foncée c'est 9, la jaune 4, etc. Presque sans s'en rendre compte, **il en vient à compter par couleurs** plutôt que par quantités de perles et effectue ainsi des opérations réelles en calcul mental. »[9]

Plusieurs pédagogues montessoriennes éminentes (Hélène Lubienska en France, Catherine Stern aux Etats-Unis, Maria Antònia Canals en Catalogne) remplacèrent les perles par des barres car **la longueur de deux barrettes de 3 et 6 perles juxtaposées n'est pas la même que celle d'une barrette de 9 perles** à cause des boucles métalliques bloquant les perles aux extrémités.

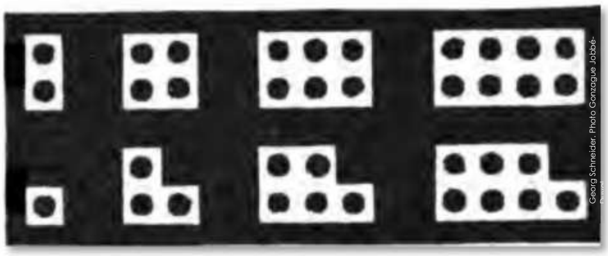
Avec les perles, il est donc difficile de faire l'expérience des relations entre les quantités. Les élèves sont tentés de compter les perles une à une ou bien d'**apprendre par cœur les relations entre des codes de couleur conventionnels** (et qui n'ont pas cours hors de ce matériel).

---

[9] Maria Montessori, *The Advanced Montessori Method. Scientific pedagogy as applied to the education of children from seven to eleven years. II. The Montessori Elementary Material*. Translated from the italian by Arthur Livingston, Londres : William Heinemann, 1919, pp. 199-200.

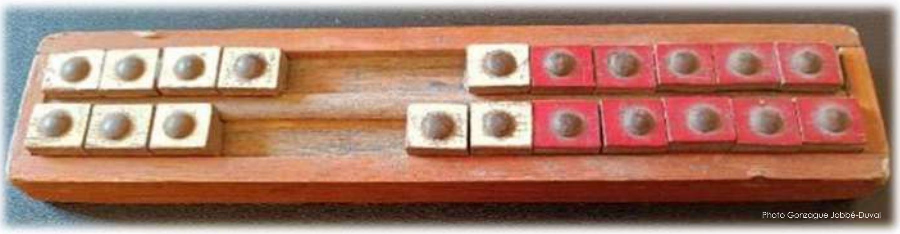
D. Donner une configuration spatiale aux unités : la solution Schneider

Selon l'Allemand Georg Schneider (1865-1938) « pour apprendre à compter [...] il faut absolument **éviter de confondre les nombres cardinaux avec les nombres ordinaux** ! Mais comment ces différences sont-elles censées devenir claires pour les enfants lorsqu'ils doivent nommer – par exemple sur un boulier – la 1ère unité comme 1, la 2ème unité comme 2, la 3ème comme 3, etc. ?! L'enfant qui observe attentivement et réfléchit logiquement doit croire que la 1ère boule vaut 1, la 2ème = 2, la 3ème = 3 et ainsi de suite. On voit qu'une telle procédure ne [...] peut donc pas conduire directement à une connaissance claire du nombre. Un appareil arithmétique mis en place de telle manière que **chaque unité ajoutée à un nombre précédent fusionne avec lui pour former un tout unifié**, serait d'une grande aide aux enfants dans la compréhension des nombres et des opérations. » [10] Il promeut des organisations spatiales par paires, empruntées à l'Allemand Born (1833-1877), autour desquelles il dessine des plaques (figures ci-contre, à voir dans son livre de 1900 en vitrine).



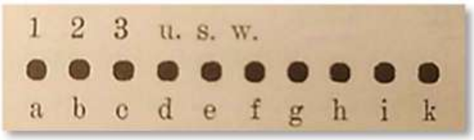
Georg Schneider, 1900

L'exposition présente une version belge moderne (1958) proche de l'outil pour l'élève breveté par Schneider en 1899 : deux groupes de 10 pièces rectangulaires qui coulissent au moyen de guides fixés sous les bords longs. Les rangées du boulier sont rapprochées pour organiser spatialement les unités en paires. Les couleurs rapprochent aussi les cinq premières unités d'une rangée avec les cinq du dessous.



[10] Georg Schneider, Die Zahl Im Grundlegenden Rechenunterricht: Entstehung, Entwicklung Und Veranschaulichung Derselben Unter Bezugnahme Auf Die Physiologische, Berlin: Verlag von Reuther & Reichard, 1900, p. 49.

Schneider développe une argumentation qui préfigure celle des conférences de Rémi Brissiaud de nos jours : selon lui les enfants débutants sont devant les quantités 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 représentées par des points alignés comme nous le serions devant des lettres a, b, c, d, e, f, g, h, i.



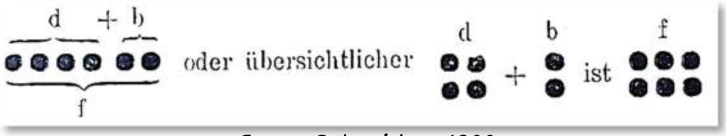
Georg Schneider, 1900

Il est difficile de percevoir « d » non pas comme le point de rang d mais comme l'ensemble des points a à d.

Et vous, sauriez-vous calculer facilement : d + b, ou f – b, ou b x d ?

Aucune image mentale ne nous vient qui nous aiderait à construire un nombre à partir des autres, à les mettre en relation. Il nous reste à apprendre par cœur une table d'addition sans comprendre.

Les configurations de Schneider permettent plus aisément de comprendre la construction du nombre. A droite nous voyons plus clairement à quoi va correspondre d + b.



Georg Schneider, 1900

Le grand « **boulier à images-nombres** », de la congrégation religieuse enseignante des Frères de la Charité[11], est le dispositif du maître utilisé en Belgique dans la première moitié du XXème siècle. Dans l'image ci-dessous la classe étudie les décompositions additives du nombre sept.


Frères de la Charité

[11] *Méthode de Calcul par les Images des Nombres. Procédé intuitif pour l'enseignement des nombres de 1 à 20. (1ère année d'études). / Aanschouwelijk rekenonderwijs getalbeelden-methode: aanschouwelijke werkwijze voor het aanleeren der getallen*.

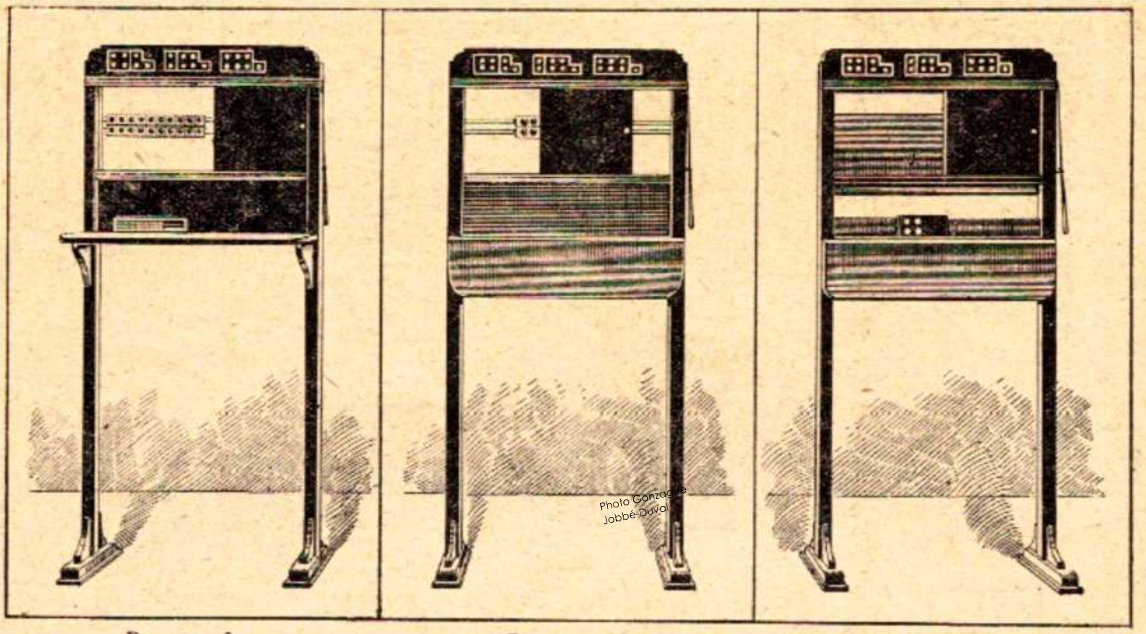


PLANCHE I.
Boulier à Images-Nombres
avec boulier des élèves.

PLANCHE II.
Exercices
avec le tableau à coulisses glissant.

PLANCHE III.
Exercices
avec le volet à coulisses montant.

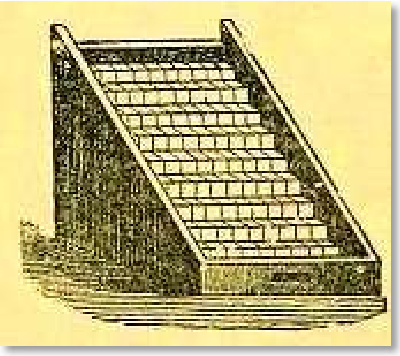
Frères de la Charité

On remarque sur les tiges centrales les mêmes unités mobiles que sur l'appareil de l'élève (qui figure sur la planche I, posé sur la tablette) mais suffisamment nombreuses pour former les nombres jusqu'à 20 et initier au passage de la dizaine. Sur la planche II est représenté le procédé – un tableau à coulisses glissant latéralement - par lequel sont occultées certaines unités (sans doute les compléments à trouver par les élèves). Sur la planche III un volet à coulisse montant sert probablement à montrer l'image d'un nombre brièvement pour que les élèves décomposent ce dernier plutôt que de compter 1 à 1.

II. Les barres et l’analogie de la longueur

L’exposition au Musée de l’école
de Chartres et d’Eure-et-Loir

A. Segmenter les barres ?

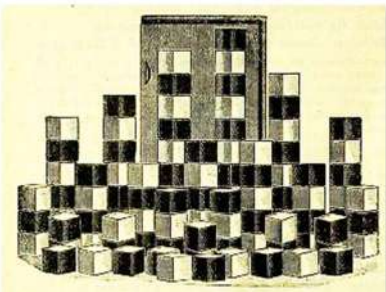


Ernst Tillich

Les premières barres, conçues par l'Allemand Ernst Tillich[12] (*Rechenkasten*, 1806), étaient incolores et sans marque des unités de base qui les composaient afin de favoriser l'expérience des relations entre les quantités par l'analogie de la longueur.

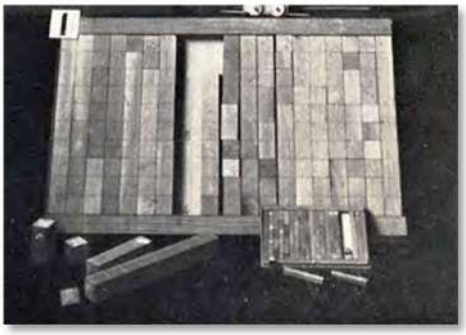
A côté d'une barre de 8 pouces les élèves pouvaient disposer quatre barres de deux pouces ou deux barres de quatre pouces ou huit barres d'un pouce, etc. Les barres étaient rangées verticalement dans une boîte de dix compartiments en terrasse. (Cf. illustration ci-dessus).

Pour donner accès aux quantités discrètes, de 1806 à 1947 les barres ultérieures furent segmentées, comme ci-dessous le *Rechenkasten* de Wander (Allemagne ~1914)[13] et les « 66 blocs » de Mina Audemars et Louise Lafendel (Genève, Maison des Petits à l'Institut J.-J. Rousseau, 1914)[14].



Nr. 87. Wander, Rechenkasten.

Wander



Audemars et Lafendel (A.S.E.N.)

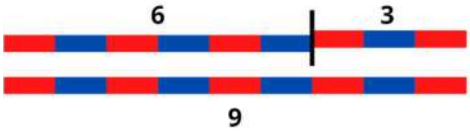
Avec les barres chaque quantité est représentée comme un tout et, par l'analogie de la longueur, l'enfant peut comparer les quantités et vérifier les relations internes aux nombres.

---

[12] Ernst Tillich, *Allgemeines Lehrbuch der Arithmetik*, Leipzig, 1806.

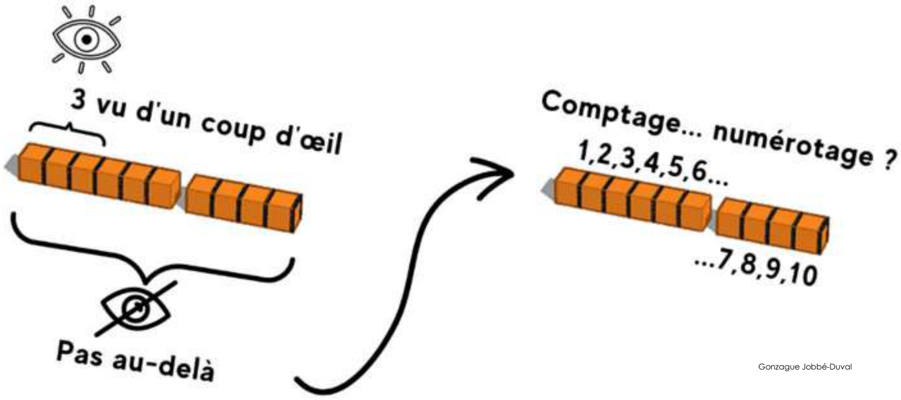
[13] *Bibliotheca paedagogica. Verzeichnis der bewährtesten und neusten lehrmittel für höhere, mittlere und elementarschulen sowie von werken der erziehungsund unterrichts-wissenschaft*. Cologne : Ständige Lehrmittel-Ausstellung, 1914. p. 206.

[14] Mina Audemars et Louise Lafendel, *La Maison des Petits de l'Institut J.J. Rousseau*, Neuchâtel / Paris : Delachaux et Niestlé, 1923.



Comme le dit Maria Montessori à propos de ses propres barres (1909) : « L'importance de ce matériel fondamental est qu'il donne une idée claire du nombre. En effet, quand un nombre est nommé il existe comme un objet, une unité par lui-même. [...] Quand un enfant nous montre le 9, il manipule une barre inflexible – un objet complet en lui-même et pourtant composé de neuf parties égales qui peuvent être comptées. »

Néanmoins, du fait que les unités de base sont marquées et disposées en ligne, l'enfant est amené à compter 1 par 1. En effet, **on ne peut pas évaluer immédiatement plus de 3 éléments** avec un seul focus de l'attention (*subitisation*).

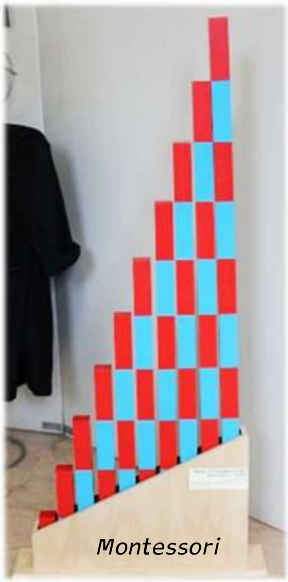


➔ Quand les barres sont disposées au sol au hasard, pour réunir deux collections **l'enfant peut, comme avec des cailloux, ne pas dénombrer chaque collection et préférer compter 1 à 1 sans mettre en *relation* les deux quantités**. A l'exemple des barres orange ci-dessus :

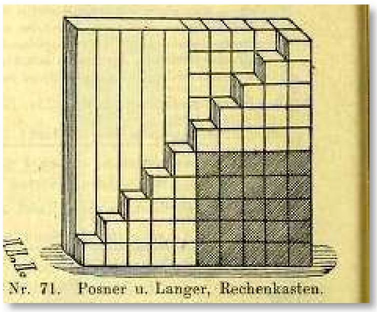
- Soit il *compte* de 1 à 9, sans prendre en compte ni 6 ni 4 comme des quantités.
- Soit il *surcompte* en récitant « 6... 7, 8, 9, 10 », sans prendre en compte qu'il y a 4 éléments dans la deuxième collection.

A-t-il expérimenté et compris que 6 et 4 font 10 ?

Sans doute le rangement des barres dans une boîte compartimentée comme celle de Montessori (et dès l'origine avec Tillich), ordonné par l'itération de l'unité, permet-il de remédier en partie à ce problème en **liant l'ordre et la quantité** : pour ajouter 6 à 4 l'enfant prendra deux barres : la sixième, composée de six unités et la quatrième composée de quatre unités.



Montessori

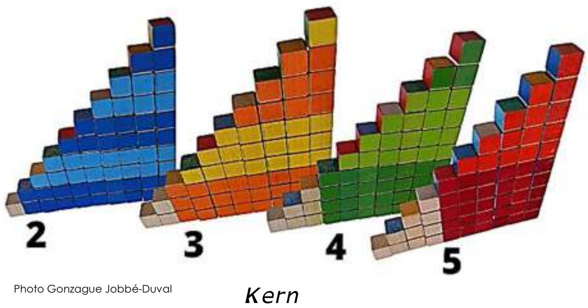


Posner et Langer

Certains matériels s'appuyèrent sur le **repère du 5** pour limiter le comptage 1 à 1, comme le *Rechenkasten* de Franz Posner et Adam Langer (1836-1919) (illustration ci-contre. Allemagne, 1894)[15].

L'Allemand Artur Kern (1902-1988) choisit avec son *Rechenkasten* (1955)[16] de représenter la **décomposition de chaque nombre en facteurs 2, 3, 4, ou 5** par l'alternance de couleurs sur chacune des quatre faces rectangulaires des barres.

Par exemple 8 est décomposé en : 2+2+2+2 ; 3+3+2 ; 4+4 ; 5+3 ; cette décomposition est représentée par l'alternance des nuances foncée et claire de la couleur attribuée à chacun des facteurs.



Kern

D'autre part la face carrée supérieure de chaque barre est colorée de la couleur du plus grand diviseur strict du nombre représenté (par exemple : 8 est de la couleur de 4 ; 9 de la couleur de 3 ; 7 est incolore).

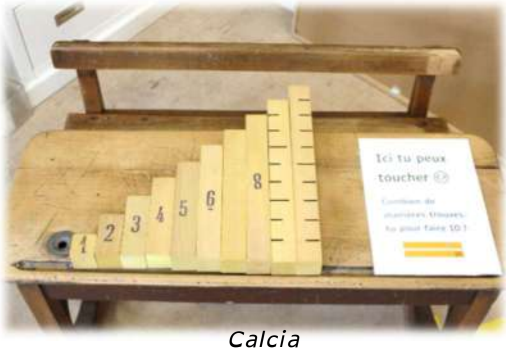
---

[15] Conçu en 1894, présenté à l'assemblée générale de l'Association des professeurs catholiques de Silésie à Frankenstein le 8 juin 1897 et repris dans l'article : Adam Langer, „Reformen im Rechenunterrichte auf der Unterstufe", in *Pädagogische Monatshefte. Zeitschrift zur Förderung der katholischen Pädagogik der Lehrerbildung und gesunder Unterrichtsreformen*, III° Jahrgang, Stuttgart, 1897.

[16] Artur Kern, *Kurze Anleitung zu meinem Rechenkasten*, Freiburg : Herder, 1955. Voir aussi : Artur Kern, *Meine Fibel zum Rechenkasten*, Herder, 1968.

Une autre solution est de laisser toutes les faces indivises comme sur les barres de Tillich sauf une face segmentée, réservée à la vérification des quantités discrètes. Mais si la segmentation est très visible, le risque est que les élèves placent systématiquement cette face en haut afin de pouvoir compter 1 par 1.

Est-ce le risque encouru par la « Bûchette d'or » de la Française Paulette Calcia (1904-1985) dont le Musée de l'école possède les exemplaires de l'élève et du maître (format géant, ci-contre) ?



Calcia

La Bûchette d'or fut inventée en 1959 « pour l'enseignement des quatre règles d'arithmétique, pour la formation et la décomposition des nombres dans les grandes sections maternelles et les cours préparatoires. » (Cf. notice). Elle permet de visualiser successivement plusieurs représentations du nombre : deux faces opposées étaient graduées, une autre donnait l'écriture chiffrée du nombre, une dernière était vide, « de manière à ce que l'éducateur puisse s'assurer d'une part que l'enfant se représente bien les unités, à la vue des faces graduées [...] et d'autre part que l'enfant est capable de décomposer les chiffres [sic], à la vue de la face numérotée [...] et enfin que l'enfant est apte à évaluer les grandeurs à la vue de la face vierge [...] de chaque bûchette. »[17]

« Pour les écoles maternelles, il est recommandé de se servir d'abord de la face unie, ensuite de la surface graduée, en troisième lieu de la surface chiffrée. » (Cf. notice.)

Notons la face chiffrée censée permettre de décomposer les nombres. S'appuyer principalement sur cette face pourrait faire du chiffre un simple support de l'apprentissage d'une table d'addition. Pour éviter cela l'enfant doit être mis longuement en situation de découvrir par lui-même les rapports de longueur et pouvoir compter les unités pour accéder aux quantités discrètes.

[17] Cf. brevet de 1967 précisant celui de 1959.

Une autre solution, particulièrement élégante, est celle adoptée par un groupe d'enseignants de Dresde (Allemagne) avec son *Rechenbaukasten* (ci-dessous) largement diffusé dans l'ancienne RDA : marquer les séparations entre unités sur une seule face par une incision très légère, à peine perceptible à moins de jouer avec la lumière du jour. Sans doute cela permettait-il aux élèves de s'appuyer d'abord sur des comparaisons de longueur et de réserver la face graduée à l'accès aux quantités discrètes et à la vérification. Ce matériel était par ailleurs basé sur le repère 5 : la plus grande barre comptait 5 unités, ce qui limitait le comptage 1 à 1 et favorisait la décomposition 5+n.

Le Rechenbaukasten

B. Colorer les barres ?

Pour éviter le comptage 1 à 1, **Georges Cuisenaire** (1891-1975) donna un rôle central aux couleurs et renoua avec l'intuition de Tillich (qu'il ne connaissait sans doute pas) en concevant des barres indivises.

Instituteur depuis 1911 et auteur d'ouvrages pédagogiques d'inspiration decrolyenne, il utilise après la Seconde guerre mondiale des bandelettes de carton coloré puis, en 1947, les premières réglettes en bois dont la forme et la couleur seront fixées après maints essais dans la brochure ***Les nombres en couleur*** publiée en 1951. Le matériel, d'abord diffusé par la Maison Duculot à Tamines (1951), sera grandement popularisé à partir de 1953 avec le concours du mathématicien Caleb Gattegno (1911-1988) qui fonda en Grande-Bretagne la Cuisenaire Company. Des associations Cuisenaire fleurirent dans le monde entier et le matériel est encore largement utilisé aujourd'hui.

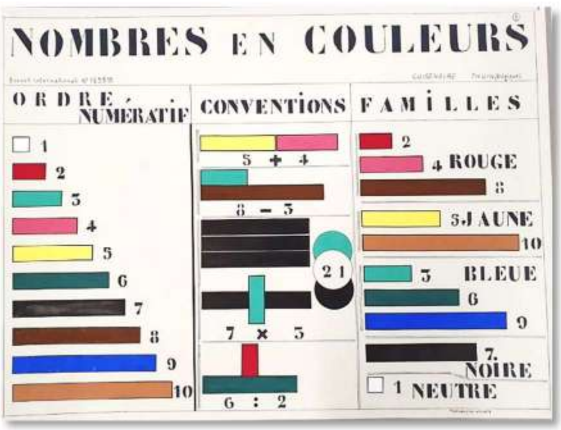
Cuisenaire

Les « nombres en couleur », pour éviter le comptage un à un, ne comportaient pas de marque des unités de base. Une couleur était associée par convention à chaque longueur de réglette mais ici, contrairement aux perles colorées de Montessori, des « familles » de couleurs facilitaient la mise en relation des quantités représentées. Cuisenaire, bon musicien, considérant qu'il y avait une analogie entre la musique et les nombres, s'était appuyé sur le fait qu'un tuyau d'orgue dont la largeur est le double d'un autre tuyau produit une note plus basse d'une octave. Il groupa alors les nombres en familles de doubles dans un but pédagogique :

- Famille rouge : 2, 4 et 8 (4 est le double de 2 et 8 le double de 4) de couleur rouge, rose et brune.
- Famille jaune : 5 et 10 de couleur jaune et orange.

- Famille bleue : 3, 6, et… 9. Ce dernier nombre était inclus sans être un double des précédents car il formait un « accord mineur » (selon l'analogie musicale). Les couleurs respectives étaient vert clair, vert foncé et bleu.
- Famille blanche : 1 était à part en tant qu'unité de base
- Famille noire : 7 était à part n'étant ni le double ni la moitié d'un autre nombre de la série.

Les premiers temps (souvent jusqu'à ce qu'ils atteignent 6 ans) les élèves s'appuyaient uniquement sur les couleurs des réglettes pour mettre en rapport leurs longueurs respectives. Ensuite seulement étaient introduits les noms des quantités. Par ailleurs, notamment pour étudier les fractions, 8 pouvait être représenté par n'importe quelle réglette (non pas la marron mais la rouge ou la verte) et l'on pouvait attribuer la valeur de 1 à n'importe quelle barre.



Les archives de l'Etat du Valais ont conservé cette ancienne affiche qui présente les principes de la méthode Cuisenaire. On voit que les regroupements par familles de doubles souffrent quelques incohérences, soit dans les valeurs mises en relation (9 est avec 3 et 6), soit dans les couleurs attribuées (pourquoi le vert est-il dans la famille bleue plutôt que dans la famille jaune ?)

Le psychologue écossais **Ian Macfarlane Smith** proposa en 1956 un système de couleur plus rigoureux : attribuer à chaque famille de doubles une seule et même teinte qui ne varie que par la nuance plus claire ou plus foncée. Malheureusement son brevet ne fut jamais exploité.

Un matériel anglais ultérieur (1961), exposé au musée, adopte un système de couleurs élégant à tout point de vue. Il s'agit des « **Colour Factor Blocks** »[18] d'Algernon Frederick **Seton Pollock** (1910-1983), basés non plus sur les doubles mais sur les facteurs premiers.

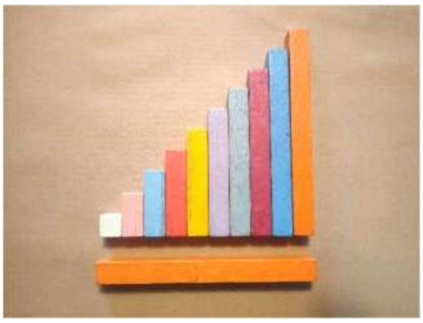
En voici présentée une utilisation possible[19].

[18] Seton Pollock, United States Patent Office n° 3,204,343. Patented Sept. 7, 1965.
Voir aussi : Seton Pollock, "The colour of six", *Mathematics Teaching* n°20, 09/09/1962.
[19] On trouvera beaucoup d'autres pistes dans le Padlet « Barres d'initiation au calcul » : [En ligne]

Seton Pollock

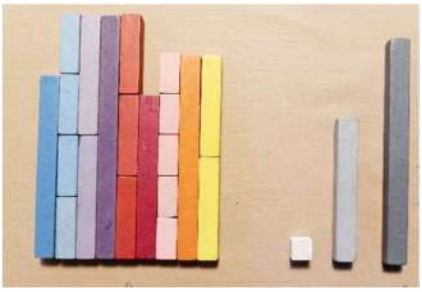
Que vaut chaque barre ? Avec des unités non marquées, il est impossible de le savoir sans **mettre en relation les barres**.

La mise en relation passe par la comparaison des longueurs des barres et d'abord par rapport à l'unité de base (le cube blanc).

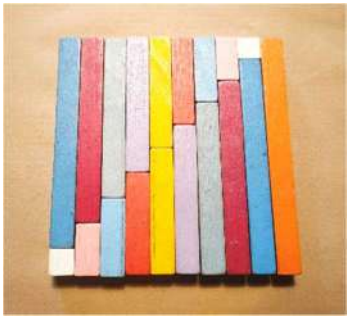


La première relation est donc celle de l'itération de l'unité (ajout répété de l'unité), représentée par cet escalier.

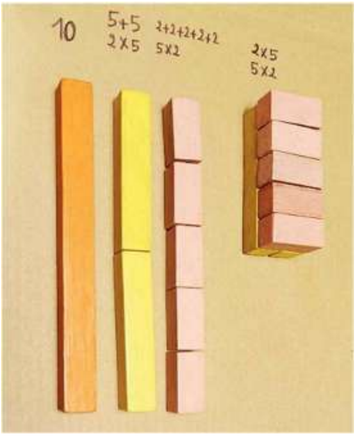
La quantité est représentée en même temps que l'ordre. « Les nombres consécutifs sont liés par l'itération [addition répétée] de l'unité » (programme maternelle 2021.)



Les couleurs attribuées par convention à chaque barre mettent ici en valeur des **relations factorielles**. Tous les multiples de 2 contiennent la couleur primaire **rouge**, les multiples de 3 du **bleu** et les multiples de 5 du **jaune**. Au sein de chaque famille les nuances de couleur vont du plus clair (nombre premier) au plus foncé. Le 1 est incolore. Le 7 et le 11, qui n'ont pas de relations factorielles avec les autres, sont gris. Les nombres représentés vont jusqu'à 12 selon le système impérial britannique des poids et mesures. Avec ces belles nuances pastel qui ne frappent pas l'œil, sans doute les élèves retenaient-ils ici moins facilement qu'avec Cuisenaire la valeur associée à chacune des réglettes ; mais cela pouvait être un avantage : ce sont les rapports entre quantités que les élèves pouvaient sans doute retenir le plus facilement.



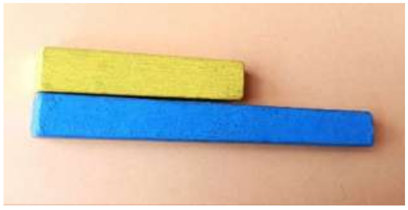
Toutes les décompositions sont représentables par la comparaison des longueurs qui permet de découvrir des relations ou de les valider. Ici les **décompositions additives** à deux termes du nombre 10.



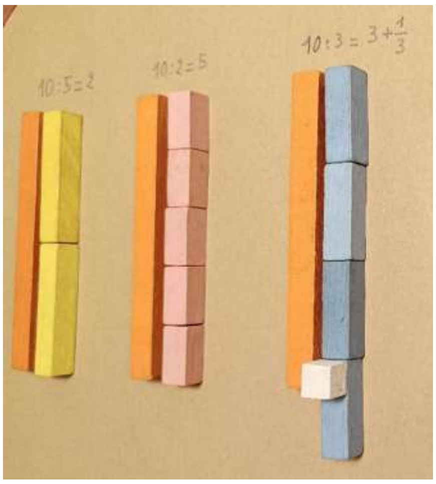
Ici les **décompositions factorielles** de 10, en ligne (validation par l'analogie de la longueur) ou en rectangle (validation par l'analogie de la surface).

Les barres peuvent aussi modéliser la **soustraction et l'addition à trou**.

Ici 9 - 5.



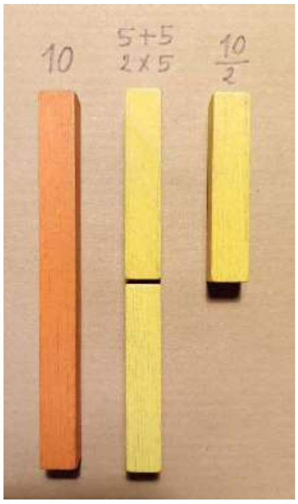
Les barres peuvent encore modéliser les **opérations de division et les fractions**.

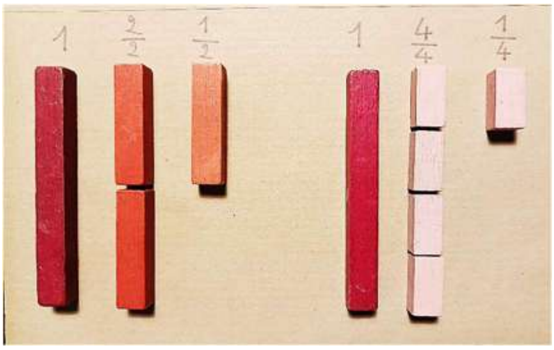


A gauche les divisions de 10 par 5, 2 et 3.

10 : 3 = 3 + 1/3

A droite la fraction 10/2.





Quand elles sont non segmentées, on peut plus facilement **attribuer aux barres la valeur de notre choix**. Par exemple la barre rouge peut valoir 1, ce qui permet de représenter ½ et ¼.

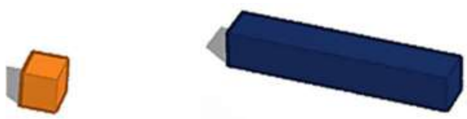
La Catalane **María-Antonia Canals** (1930-2022) adopta vers les années 1970, pour les élèves à partir de 6 ans, un système de réglettes colorées proche de celui de Pollock (mais moins rigoureux) L'originalité de son matériel tient à l'ajout de plaques carrées représentant le carré de chaque nombre et à celui de cubes représentant le cube de chaque nombre, chacun de la même couleur que le radicande et entièrement lisse, sans marque des unités de base.


Canals

*

Avec les réglettes Cuisenaire et les autres réglettes indivises colorées, on échappe bien au risque de comptage 1 à 1 mais on court d'autres risques.

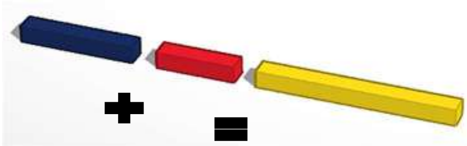
D'abord, comme pour les barres pionnières de Tillich, l'accès aux quantités discrètes n'est pas évident. Pour les plus jeunes ou les moins avancés, **une barre longue comme six cubes reste un seul objet.** En maternelle et au-delà, la barre représente-t-elle clairement les six cubes qui la composent ?



1 **1**

En 1989, Rémi Brissiaud qui étudiait les outils permettant de mettre en relation les quantités, reconnut la possibilité, grâce aux réglettes Cuisenaire, de faire anticiper aux élèves les relations entre les quantités et de vérifier eux-mêmes ces relations.

Mais il jugea, à la suite de Piaget, que « la façon dont ces relations sont apprises est très dépendante de la pédagogie de l'enseignant : le risque est grand que cet apprentissage résulte d'une simple mémorisation liée à l'apprentissage du code de couleurs, à force de répétitions, plutôt qu'il ne résulte des mises en relation (…) »[20]



Au fond les réglettes pouvaient être utilisées uniquement comme une illustration matérielle du problème à traiter fournissant par simple lecture le résultat : on vérifie seulement ce que nous a appris le maître (4+5=9) en plaçant une réglette de 4 au bout d'une réglette de 5 et en comparant la longueur des deux réglettes avec celle de 9. Alors qu'il s'agit plutôt grâce au matériel d'anticiper le résultat et de le valider soi-même.[21]

Brissiaud vit un **risque plus grand encore avec les enfants de maternelle concernant la validation par l'analogie de la longueur**.

Confrontés à des réglettes non-divisées en unités ils peuvent seulement comparer une réglette « 7 »[22] avec sept unités mises bout à bout, ce qui est moins clair que de voir les 7 unités dans la barre elle-même. Et le nom des réglettes ajoute à la difficulté car Cuisenaire nommait « réglette 7 » la réglette longue de 7 cubes unités, or la mesure de la longueur est introduite dans le cursus après l'étude des premiers nombres. Brissiaud conclut que **l'usage de ce matériel en grande section de maternelle « suppose l'accès à des conventions difficiles à construire avec de jeunes enfants.** »

[20] Rémi Brissiaud, *Comment les enfants apprennent à calculer*, Retz, 1989.

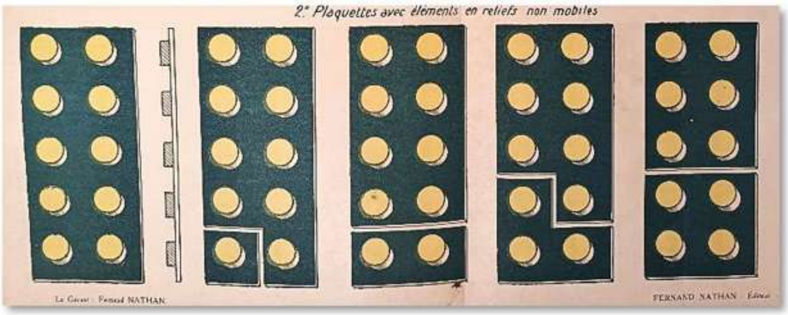
[21] Cela nous conduit plus profondément à un problème que je n'aborderai pas ici. Comme l'exprimait Madeleine Goutard, grande théoricienne des réglettes Cuisenaire : trop souvent « les élèves sont traités comme des manœuvres à qui l'on ne confie que les tâches serviles de dénombrement et de calcul. « Voilà tels nombres, additionnez-les, donnez la réponse ». Pourquoi ? À quelle fin ? Des buts et des intérêts de l'entreprise mathématique, ces manœuvres ne sont pas mis au courant ». Le mouvement Freinet cherchera ainsi à remplacer un usage purement scolaire (et même « scolastique »), par un usage vivant qui favorise une « culture du sens mathématique ». Voir Célestin Freinet « Pour un enseignement mathématique efficient, vers les mathématiques modernes », *L'Éducateur* n°12-13, mars 1966, C.E.L. L'article cite : Madeleine Goutard, *Les mathématiques et les enfants. La pratique des nombres en couleurs dans les classes primaires*, Ed. Delachaux et Niestlé, Neuchâtel.

[22] Brissiaud ne semble pas connaître l'usage de s'en tenir aux couleurs pour nommer les réglettes avant 6 ans.

C. Des solutions alternatives

Herbinière-Lebert : la forme plutôt que la couleur et la longueur

La Française Suzanne Herbinière-Lebert utilise depuis 1923 des plaquettes organisées, comme celles de Georg Schneider en Allemagne, à partir d'unités organisées en paires. Elle abandonne l'analogie de la longueur tout en gardant la manipulation des collections elles-mêmes qu'elle emprunte aux barres Montessori : « Nous avons repris l'idée qui conduisit Mme Montessori à établir ses barres et ses chaînes de perles, idée consistant à matérialiser chaque quantité et à la présenter sous la forme d'un tout. Mais nous n'associons pas la notion de quantité à une longueur comme dans les barres, à une longueur et une couleur comme dans les chaînes de perles mais à une forme, à un plan, qui nous paraissent plus concrets encore. »[23] (1926) Nous y reviendrons plus tard.



Herbinière-Lebert

Stern : des barres segmentées *et* colorées. La forme *et* la longueur.

L'Américaine Catherine Stern (1894-1973, née Käthe Brieger en Allemagne) utilise des barres *en même temps* que des plaquettes trouées organisées par paires avec des cubes mobiles (vers 1939-1945)

Les barres sont graduées *et* colorées. La couleur est censée permettre de réserver le comptage 1 à 1 à la vérification.

L'élève accède par des représentations analogiques distinctes aux mêmes rapports entre des quantités.

Stern

[23] Suzanne Herbinière-Lebert, « Initiation sensorielle au calcul », *L'Éducation enfantine*, n°1, 1er octobre 1926.

Brissiaud : des constellations *sur* les barres non-segmentées.

En 2016 Rémi Brissiaud (1949-2020) a été associé à la conception d'une méthode associant un logiciel (pour projection en classe et pour tablettes individuelles), un manuel papier et des matériels solides : « Les Noums » (éd. Retz). Ses barres non-segmentées ont l'aspect de monstres nommés « noums » dont les yeux sont des collections-témoins organisées autour du repère 5. L'enfant ne compte pas 1 par 1 et la couleur joue un rôle secondaire : la constellation représente le nombre et facilite l'accès à des relations entre quantités.

Brissiaud et Dragonbox

Rémi Brissiaud explique : « On remarquera que les noums 1, 2, 3 et 4 se reconnaissent facilement parce que le noum 1 a 1 œil, le noum 2 a 2 yeux, etc. Les noums 5 et 10 se reconnaissent par leurs couleurs : gris et noir. Enfin le grand noum avec 1 œil est le noum 5+1=6, le grand noum avec 2 yeux est le noum 5+2=7, etc. Contrairement à ce qui se passe avec le matériel Cuisenaire, un lent apprentissage du code de couleurs n'est pas ici nécessaire. »

L'auteur précise : « la couleur n'est pas une propriété mathématique, elle peut même créer un obstacle à la compréhension chez les enfants les plus fragiles : ceux qui s'efforceraient de reconnaitre les Noums à partir de leur couleur n'ont pas accès au repère 5 qui, lui, a partie liée avec la compréhension (conceptualisation) des nombres. »[24] La couleur a plutôt été introduite pour créer un « univers » qui facilite « l'engagement et la motivation » des jeunes élèves[25].

La collection-témoin organisée par les yeux des noums ne permet pas seule à l'enfant d'accéder à la quantité de noums-unités de base. Elle représente seulement cette

[24] https://twitter.com/LesNoums/status/1268183617257209856
[25] https://twitter.com/LesNoums/status/1268216327191367680

quantité et permet d'éviter le comptage 1 à 1 qui aurait lieu avec une représentation alignée des unités de base. Le dévoilement des unités de base qui composent les « noums » se fait soit en plaçant sur eux une sorte d'appareil de radiographie (photo ci-contre) qui montre ce qu'ils ont dans le « ventre », soit en découpant du doigt les « noums » pour décomposer un nombre en plus petits nombres. Pour recomposer un nombre, un « noum » peut en avaler un autre et former le « noum » qui est la somme des deux.

Précisons la différence qu'il y a, du point de vue de la représentation mentale chez les élèves, entre couper un « noum » et radiographier un « noum » pour voir ce qu'il a dans le corps. Quand un élève aux compétences fragiles coupe un « noum 4 » avec son doigt autant de fois que possible, et que le « noum » se décompose en quatre unités de base, il peut penser que c'est à cause du nom du « noum », qu'il s'agit d'une simple règle : le « noum 4 » donne 4. Brissiaud a fait l'expérience que le scanneur / la radio justifie aux yeux des enfants les effets du découpage : c'est parce que le "noum 4" a quatre "noums" unités dans le corps qu'il peut être découpé en quatre noums unités[26].

Malheureusement la vérification des unités de base qui composent les barres n'est pas possible avec les barres physiques (photo ci-dessous, éd. Retz).

Brissiaud (Retz)

Il reste à inventer un matériel solide utilisant l'analogie de la longueur qui éviterait le comptage 1 à 1 tout en permettant la vérification des unités de base.

[26] Communication privée de Rémi Brissiaud, octobre 2019.

III. Les collections-témoins organisées de manière non-alignée

A. La guerre des constellations

Quittons à présent les représentations des nombres organisées en ligne selon l'analogie de la longueur pour examiner des collections-témoins organisées différemment, comme celles des **dés et dominos**, des **plaquettes Herbinière-Lebert** ou des **configurations de Lay**.

Rémi Brissiaud et à sa suite de nombreux commentateurs des programmes rénovés depuis 2015, appellent fréquemment de telles collections-témoins organisées des « nombres figuraux »[27]. Comment comprendre cette appellation ?

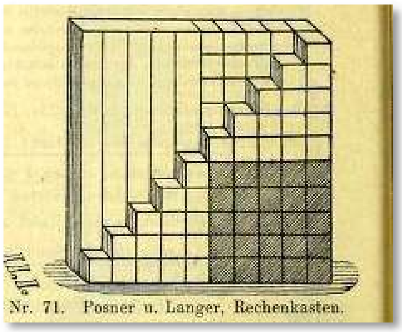
Notons d'abord que « nombres figuraux » est d'usage nettement plus rare et plus récent que « nombres figurés » dont elle est l'équivalent. Est-ce pour assumer une distinction ?

Depuis l'Antiquité les mathématiciens ont *représenté certains nombres entiers et leurs relations récurrentes par des ensembles de points formant une certaine figure géométrique*. De tels nombres sont appelés « nombres figurés »[28].

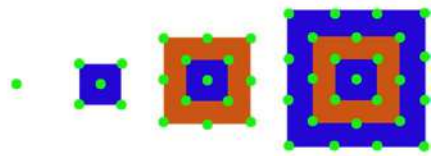
Les représentations alignées adoptées par les bouliers et les barres segmentées[29] en sont un exemple qui permet de représenter géométriquement la suite des nombres entiers, comme on le voit ci-dessous avec le « *Rechenkasten* » de Posner et Langer

[27] Rémi Brissiaud, « Pourquoi l'école a-t-elle enseigné le comptage-numérotage pendant près de 30 années ? », in *Contribution aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes C2, C3 et C4*, 2014. URL : https://www.education.gouv.fr/media/14666/download
[28] Voir par exemple le site Internet : http://www.recreomath.qc.ca/dict_figure_nombre.htm
[29] Précisément : les nombres linéaires sont des nombre figurés de première dimension représentés par une ligne de points continue ou brisée. Parmi les linéaires on trouve les **nombres gnomoniques triangulaires** représentés par le gnomon d'un triangle équilatéral. Ce sont ceux matérialisés par les barres et bouliers.

et avec « L'abaque des 55 boules » (ou « boulier triangulaire ») d'Audemars et Lafendel (visible au Musée de l'école).



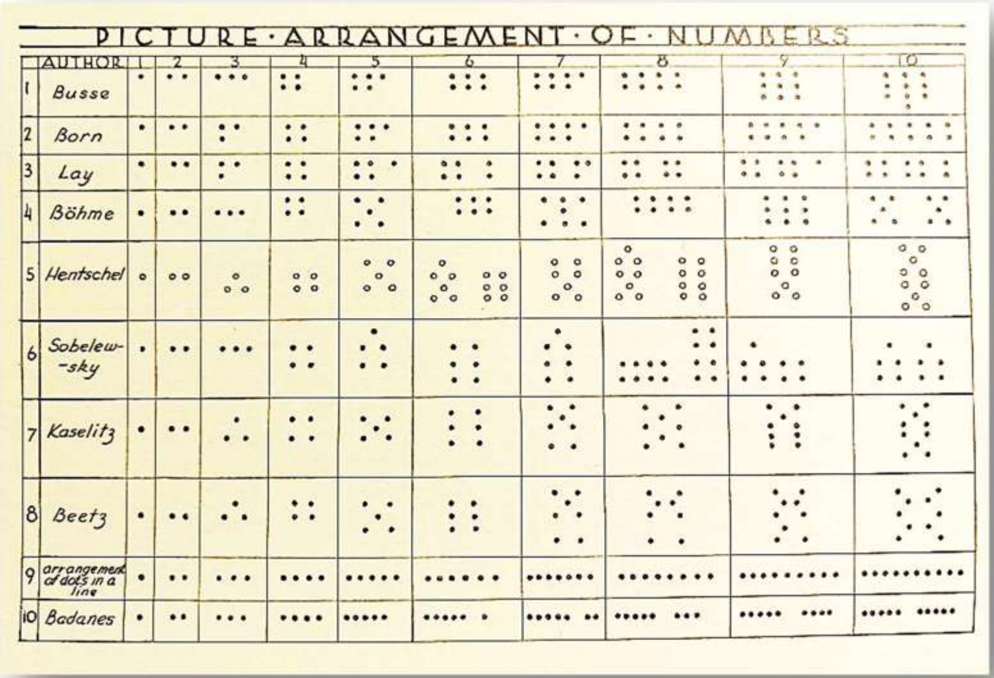
D'autres nombres figurés représentent de manière géométrique d'autres relations entre les nombres. Prenons l'exemple des nombres centrés carrés plan (ou de dimension 2)[30]. J'ai dessiné ci-dessous approximativement les quatre premiers de la série :



Quant aux représentations que nous étudions à présent (comme celle du dé), sont-elles des nombres figurés ?

Elles ont été mises en avant par les pédagogues depuis le 19e siècle pour favoriser la construction des premiers nombres et l'initiation au calcul élémentaire. Pour autant que je puisse en juger, aucune des représentations ci-dessous (sauf, dans une certaine mesure, la 9e, alignée régulièrement) ne correspond à la définition habituelle des nombres figurés. Les pionniers Allemands les appelaient d'ailleurs plus volontiers « *Zahlenbilder* », c'est-à-dire « images de nombres » et elles ont souvent été appelées en France « constellations ».

30 Tout nombre de rang n de cette classe est la somme des n plus petits centrés carrés de dimension 1. Le terme général est ($2n^2 - 2n + 1$). Cf. http://www.recreomath.qc.ca/



Ces représentations sont des collections témoins organisées dans l'espace selon certains principes. Chacune d'entre elles est donc tout de même une figure géométrique. Mais **seule la collection alignée (n°9) conserve une même figure géométrique à chaque ajout d'une unité**.

Chacune des représentations est en relation récurrente à la précédente représentation par l'itération de l'unité. Mais chacune des représentations est-elle toujours dans la même relation *géométrique* avec celle qui la précède et qui la suit ? Ce n'est le cas (et seulement jusqu'à la dizaine) qu'avec la représentation alignée (n°9).

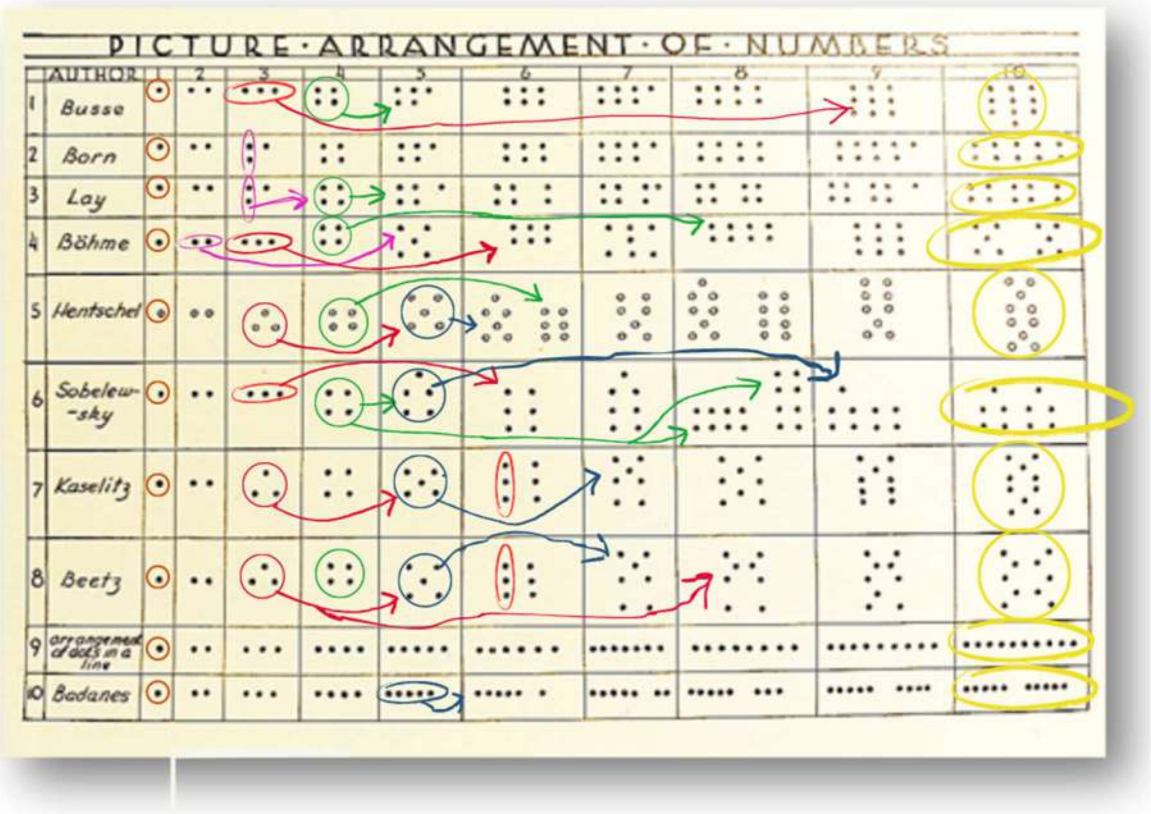
Toutes ces représentation ajoutent en effet les unités jusqu'à constituer dans l'espace un ou plusieurs groupes (de 2, 3, 4, 5, 10) au-delà desquels la série ajoute des unités en dehors du groupe jusqu'à en constituer un nouveau et ainsi de suite. **L'ajout de l'unité passe même souvent par une reconfiguration de la figure précédente** (sauf pour les représentations n° 2 et 3).

Les pédagogues du 19e siècle ont adopté ces figures pour permettre aux élèves de construire chaque représentation d'un nombre à partir des précédentes en rendant visible l'itération de l'unité, tout en – ce qui n'est pas entièrement compatible – tenant compte du nombre limite d'objets perceptibles d'un seul focus de l'attention (ce que nous appelons « subitisation » depuis 1949) pour permettre d'évaluer une collection par ses décompositions. L'intention du pédagogue est de permettre au jeune enfant d'éviter de compter un par un chacun des points, afin d'accéder au nombre par la *mise en relation* de petites quantités.

Les premiers grandes expériences scientifiques de didactique des mathématiques, menées à la charnière du 19e et du 20e siècle[31], cherchèrent à départager les représentations des quantités autour de l'enjeu de la facilité de reconnaissance d'une petite quantité, en la montrant si brièvement aux élèves qu'ils ne puissent pas compter 1 à 1. Toutes les expériences qui suivirent montrèrent l'avantage des représentations non-alignées sur les représentations alignées qui étaient celles des bouliers et des barres issues de celles de Tillich. La question fut alors de départager deux fréquents finalistes : les configurations de Born (n°2, adoptées par Herbinière-Lebert) et de Lay (n° 3).

Regardons la logique pédagogiques de ces différentes configurations. J'ai entouré en orange l'unité de base dont l'itération constitue la suite des nombres. Les autres couleurs entourent les repères organisés spatialement en groupes, à partir desquels on recommence la série. Le groupe de la dizaine, en jaune, est l'unité de rang supérieur. Les groupes intermédiaires à 10 sont probablement choisis parce que respectant une limite de subitisation. Nous dirions aujourd'hui qu'une collection de 3 objets alignés[32] est naturellement évaluable par un jugement rapide, précis et confiant. Cette limite a pu être décrite par les pédagogues anciens comme allant jusqu'à 4 voire 5. Les premiers didacticiens ont compris qu'en organisant les objets selon certaines configurations basées sur les repères 2, 3, 4 ou 5 on accroissait la capacité des enfants à dénombrer sans compter 1 à 1.

[31] A commencer par celles de l'Allemand Lay publiées dans : Wilhelm August Lay, *Fuhrer durch den ersten Rechenunterricht*, Wiesbaden, 1898. [Version révisée en 1907].
[32] FISCHER J.P., « Le subitizing et la discontinuité après 3 », In J. Bideaud, C. Meljac & J.P. Fischer (Eds), 1991, *Les chemins du nombre*, 235-258, Lille : Presses Universitaires.



Malgré la régularité imparfaite de leur organisation dans l'espace, Rémi Brissiaud appelle ce type de représentations « nombres figuraux » en référence aux représentations des Pythagoriciens. Pourquoi ?

Sans doute Brissiaud entend-il ainsi anoblir les collections-témoins organisées en les reconnaissant comme d'authentiques « symboles numériques ».

Il prend l'exemple suivant[33] :

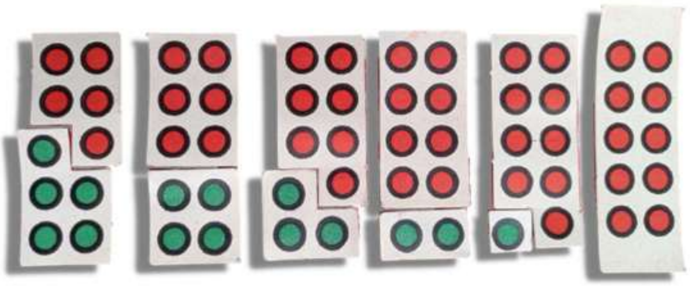
> *Avec une collection-témoin organisée (cas de celle ci-dessus), la quantité est toujours représentée à 1 unité près mais, de plus, l'accès à la quantité ne nécessite plus une longue correspondance terme à terme, il est direct. Il n'y a aucun risque de confondre la quantité correspondante avec celle qui la précède ou celle qui la suit. Avec une collection-témoin organisée, ce n'est pas seulement la quantité qui est symbolisée, ce sont aussi les différences de 1 entre deux quantités successives,*

[33] Rémi Brissiaud, « Pourquoi l'école a-t-elle enseigné le comptage-numérotage pendant près de 30 années ? », in *Contribution aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes C2, C3 et C4*, 2014. URL : https://www.education.gouv.fr/media/14666/download

c'est-à-dire l'itération de l'unité. Dans ce cas, on peut parler de symboles qui fonctionnent de manière numérique. [...]

On notera en effet qu'une telle collection-témoin organisée ne donne pas seulement accès à la décomposition correspondant au dernier ajout de 1 (seize-et-encore-1) parce que l'évocation d'autres décompositions est facilitée : c'est dix-et-encore-7, c'est trois-fois-5-et-encore-2 et, en dénombrant successivement les points de la ligne du haut, celle du bas et du milieu, c'est deux-fois-7-et-encore-3...

Par ailleurs, parmi les collections-témoins organisées particulièrement mises en valeur par Rémi Brissiaud (les doigts, les constellations du dé, les configurations Herbinière-Lebert, les jetons alignés avec les repères 3, 5 et 10), ce dernier a remis en valeur les **configurations Herbinière-Lebert** (héritées de l'Allemand Born) qui sont, parmi les représentations illustrées plus haut (n°2), celles qui se rapprochent le plus de la définition habituelle des « nombres figurés » (du moins pour les dix premiers nombres[34]). **Leur représentation spatiale plus régulière**[35] (compromis entre la représentation de l'itération de l'unité et le groupement par 2) de la formation de chaque nombre de la série permet de former chacune des 10 premiers représentations spatiales des nombres entiers avec toutes les précédentes. Suzanne Herbinière-Lebert les appelait d'ailleurs « figures numériques ». C'est ce qui fait que les plaquettes Herbinière-Lebert sont les **seuls matériels organisés de manière non linéaire à pouvoir être assemblés pour former n'importe lequel des 10 premiers nombres.** Nous en avons un exemple ci-dessous, dans l'exposition du Musée de l'école, pour le nombre 10 avec le « Rechenkasten Nr 2 » (éd. Zeise) de l'Allemand Eugen Koller datant d'après la 2e Guerre Mondiale. Nous y reviendrons.



Koller

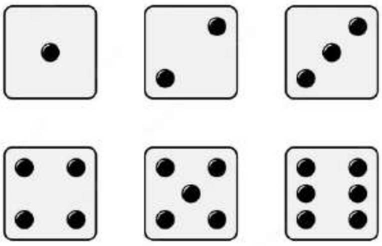
[34] Ce qui est faible d'un point de vue arithmétique mais fort d'un point de vue didactique dans le cadre du système décimal. Avec les configurations Herbinière-Lebert (comme avec les autres « images des nombres » présentées ci-dessus), au-delà de 10 il y a une rupture de la relation géométrique, due à la vocation de ces représentations d'une part d'illustrer le système décimal et d'autre part de permettre aux jeunes élèves de décomposer visuellement les nombres.

[35] Régularité qui n'a pas la récurrence des relations géométriques entre les nombres figurés : on alterne rectangle et hexagone.

Parallèlement, Rémi Brissiaud prit une conscience croissante de l'importance de rendre plus régulière la représentation des constellations du dé pour qu'ils soient de plus authentiques nombres figuraux.

Nous allons présenter à présent cet effort des pédagogues en faveur de dés et dominos avec des organisations spatiales plus régulières.

B. Les dés et dominos : vers une formation plus régulière de leurs constellations



Le **point fort** des configurations classiques des points du dé est que les représentations des nombres y sont facilement identifiables. Par exemple le nombre 6 est traditionnellement représenté par deux séries de 3 points alignés. Cette représentation a l'avantage de s'appuyer sur un double (facilement mémorisable) et sur deux groupes ne dépassant pas trois points (facilement appréhendables d'un coup d'œil).

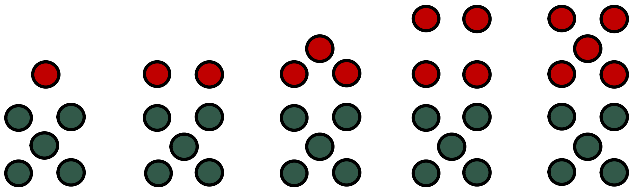
Le fait qu'il y ait eu le plus souvent six faces sur un dé a sans doute contribué à ce que les dominos combinent traditionnellement deux nombres n'excédant pas 6.

Le point faible de ces représentations est qu'elles ne permettent pas de représenter clairement l'itération de l'unité dans la construction des nombres. 4 n'est pas visiblement formé à partir de 3 (la disposition des 3 points précédents a changé et c'est plutôt le double de 2 qui est mis en valeur), et 6 n'est pas visiblement formé à partir de 5 (la disposition des 5 points précédents a changé et c'est plutôt le double de 3 qui est mis en valeur). L'enfant risque ici de perdre de vue l'itération de l'unité et d'associer un mot-nombre à une certaine figure sans la mettre en relation avec la précédente : c'est ce qu'on observe chez beaucoup de tout jeunes élèves capables de dire « six » devant la face du dé comportant 6 points mais incapables de dire « six » devant deux dés comportant respectivement 5 et 1 points.

De nombreux pédagogues ont dès lors reconfiguré les dés et dominos à contrecourant d'usages très ancrés dans la culture par les jeux populaires.

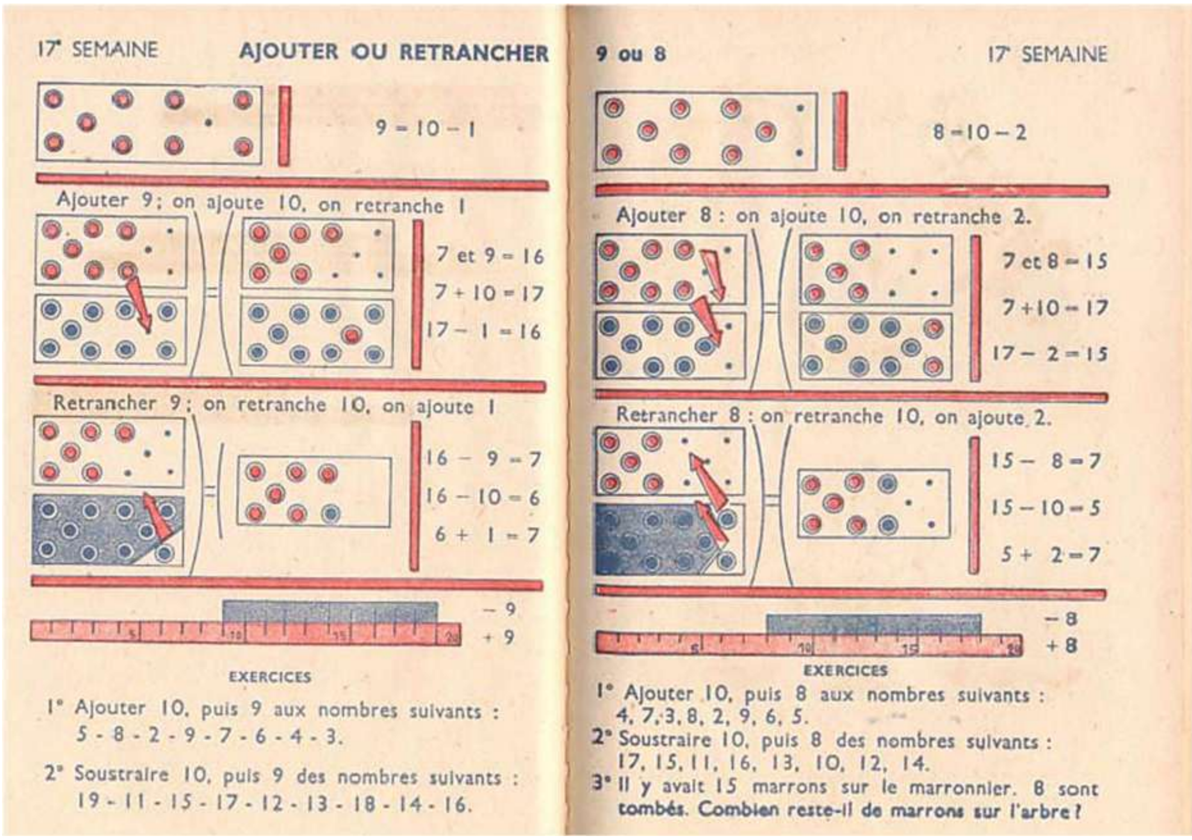
A. Représenter 6 à partir de 5 puis, avec deux dés ou des dominos, donner un rôle pivot à 5.

Dès 1842 l'Allemand Hentschel (1804-1875) représente parfois[36] les nombres 6 à 10 en supprimant la représentation de 6 par deux groupes de 3 points alignés et de 8 par deux groupes de 4 points en carré. Il s'appuie sur le **repère 5** en représentant les nombres 6 à 10 comme 5+n**.** La représentation de 3 permet de voir dans 5 à la fois 3+2 et 4+1.



5 joue ici un rôle pivot, intermédiaire à 10 qui est la base de notre système de numération.

Le mathématicien et recteur Albert Châtelet (1883-1960) ancra en France ce repère 5 (même s'il ne dédaignait pas d'autres représentations), ici dans son manuel pour le CP en 1947 (1ère édition 1934)[37].


17e SEMAINE AJOUTER OU RETRANCHER

9 = 10 − 1

Ajouter 9 : on ajoute 10, on retranche 1

7 et 9 = 16
7 + 10 = 17
17 − 1 = 16

Retrancher 9 : on retranche 10, on ajoute 1

16 − 9 = 7
16 − 10 = 6
6 + 1 = 7

− 9
+ 9

EXERCICES

1° Ajouter 10, puis 9 aux nombres suivants :
5 - 8 - 2 - 9 - 7 - 6 - 4 - 3.

2° Soustraire 10, puis 9 des nombres suivants :
19 - 11 - 15 - 17 - 12 - 13 - 18 - 14 - 16.

9 ou 8 17e SEMAINE

8 = 10 − 2

Ajouter 8 : on ajoute 10, on retranche 2.

7 et 8 = 15
7 + 10 = 17
17 − 2 = 15

Retrancher 8 : on retranche 10, on ajoute 2.

15 − 8 = 7
15 − 10 = 5
5 + 2 = 7

− 8
+ 8

EXERCICES

1° Ajouter 10, puis 8 aux nombres suivants :
4, 7, 3, 8, 2, 9, 6, 5.

2° Soustraire 10, puis 8 des nombres suivants :
17, 15, 11, 16, 13, 10, 12, 14.

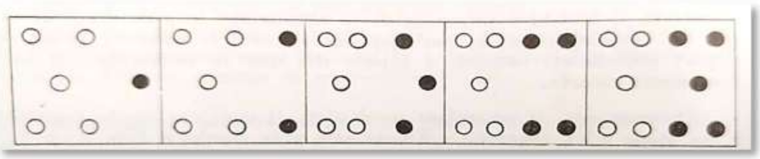
3° Il y avait 15 marrons sur le marronnier. 8 sont tombés. Combien reste-t-il de marrons sur l'arbre ?

Albert Châtelet, 1947

[36] Il hésite avec la représentation basée sur les doubles 3 pour 6 et les doubles 4 pour 8.
[37] Albert Châtelet, *J'apprends les nombres* [livre de l'élève pour le CP], Bourrelier, 1947.

En 1949, au Congrès organisé à Lyon par l'Association générale des institutrices des écoles maternelles et classes enfantine[38] sur le thème de l'initiation au calcul, « la plupart des institutrices semble être restée fidèle aux dispositions des dés à jouer préconisées par M. Châtelet, les nombres de 6 à 10 reprenant la disposition des cinq premiers nombres successivement ajoutés à ce nombre 5 »[39].

Gustave Mialaret adoptera ces mêmes configurations dans son rapport[40] fait pour l'UNESCO en 1954 (ci-dessous).

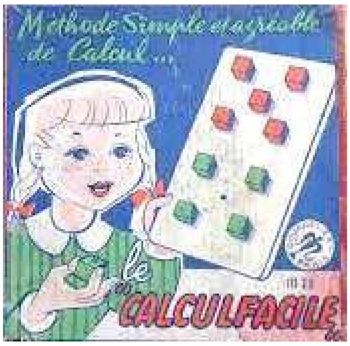


Mialaret, 1954

En 1956 au moins deux éditeurs proposaient une « domino de la dizaine » : « plaque de bois percée de 10 trous disposés comme les points d'un jeu de dominos » accompagnée de bouchons de 2 couleurs[41].

Un matériel comme « Ma boîte de calcul » (Armand Colin – Bourrelier, autour de 1960) reprend la configuration de Châtelet sur son couvercle.

En 1962 les éditions Bourrelier éditent encore un matériel, largement diffusé, nommé **« Calcul facile »**. Il est basé sur le domino au double 5 en quinconce : « Plaque de matière plastique percée de 10 trous disposés comme les points d'un jeu de domino. Le travail de décomposition et de recomposition des nombres de la première dizaine peut se faire avec ce jeu qui comporte également de petits cubes à pression de 2 couleurs. »[42]

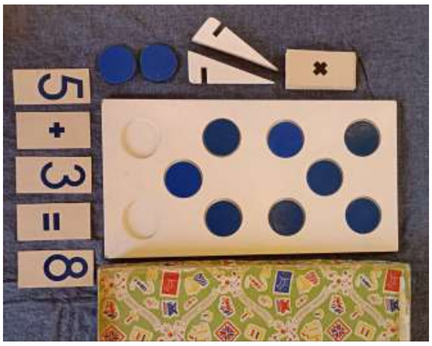


Calcul facile (Bourrelier)

Le musée expose aussi (photo ci-dessous à gauche) un matériel géant édité par Nathan sur le même principe et un « carré-domino » édité par A. Rossignol dans les années 1960-1970.

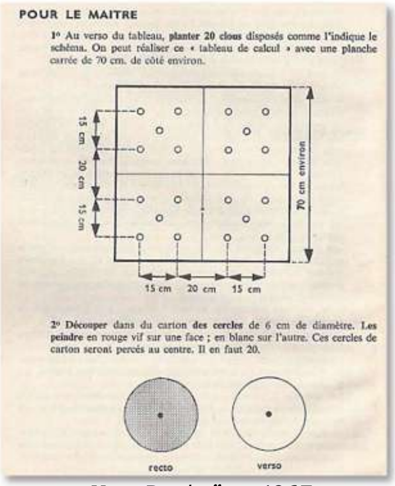
---

38 Et par l'Association des inspectrices des écoles maternelles.
39 *Initiation au calcul*, collection « Cahiers de pédagogie moderne pour l'enseignement du premier degré », Paris : Bourrelier, 1949. [Je cite la deuxième édition de 1950].
40 MIALARET Gaston, *Pédagogie des débuts du calcul*, Fernand Nathan, 1955.
41 Les éditions Bouche et le Centre d'activités pédagogiques, d'après LEANDRI F. et BOULAY L., *Le Matériel éducatif. Son utilisation pour les enfants de 4 à 7 ans*, « Cahiers de pédagogie moderne », Paris : Bourrelier, 1956, p. 130.
42 BANDET Jeanne (dir.), *Cahiers de pédagogie moderne : Les débuts du calcul*, Armand Collin, collection « Bourrelier », 1962, p. 123.



(Fernand Nathan)

Carré-Domino (A. Rossignol)



POUR LE MAITRE

1° Au verso du tableau, planter 20 clous disposés comme l'indique le schéma. On peut réaliser ce « tableau de calcul » avec une planche carrée de 70 cm. de côté environ.

2° Découper dans du carton des cercles de 6 cm de diamètre. Les peindre en rouge vif sur une face ; en blanc sur l'autre. Ces cercles de carton seront percés au centre. Il en faut 20.

Max Benhaïm, 1967

En 1967 Max Benhaïm proposait dans *L'Enseignement du calcul CP* [43] (réédité aujourd'hui) de fabriquer pour la classe un matériel semblable (illustration ci-contre).

Après la Seconde guerre mondiale et jusqu'aux années 1970, sur les quatorze manuels scolaires examinés par Jean-Paul Fischer, « 5 privilégiaient les constellations construites à partir du cinq en quinconce [...]. Toutefois, dans 3 de ces 5 manuels, les auteurs ont, comme Hentschel, hésité devant – voire renoncé à – une construction basée sur le 5 standard pour les nombres 6 ou 8. »[44]

Aujourd'hui encore ce type de matériel est un peu diffusé en France, par exemple par les éditions Celda sous le nom « Plaka 10 ».

Le musée expose aussi les *Pattern-Boards* éditées aux Etats-Unis (années 1970 ?) par Philograph Publications pour disposer les cubes de la marque Unifix (assemblables par une seule face) développés par Tacey. On remarque ici le souci de construire chaque nombre à partir du précédent : présentation de chaque nombre sur une plaque dédiée, réorganisation de la constellation de 3 unités et appui sur le repère 5.

Unifix Pattern Boards (Philograph Publications)

43 *Jour après jour. L'Enseignement du calcul. Cours préparatoire*, livre du maître, Hatier, 1967.
44 Jean-Paul Fischer, « La distinction procédural/déclaratif : une application à l'étude de l'impact d'un "passage du cinq" au CP », in : *Revue française de pédagogie*, volume 122, 1998. Recherches en psychologie de l'éducation. pp. 99-111. Lire cet article important pour l'histoire du repère 5, ainsi que son ouvrage plus ancien et difficilement consultable : *L'enfant et le comptage*, Strasbourg : IREM, 1982.

Mentionnons encore récemment le manuel *Nombres et problèmes au CP* d'Yves Thomas et Magali Hersant, finalement non publié par les éditions Retz mais disponible en ligne[45]. Il s'appuie sur une utilisation privilégiée du dé[46]. Yves Thomas considère, à la suite de Rémi Brissiaud, que « le comptage d'un en un ne prépare pas au calcul, il est plutôt un obstacle au calcul. » Et il juge que « les configurations du dé sont la représentation où il est le plus facile de se passer du comptage ».

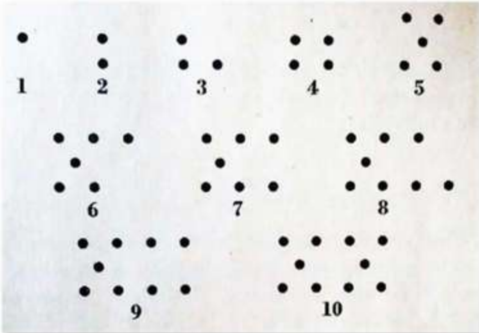
Au-delà de la meilleure représentation de l'itération de l'unité avec les dés organisés autour du repère 5, Rémi Brissiaud (1949-2020) a plaidé pour le choix raisonné de certaines décompositions additives qui initieront au calcul. Il rappelle[47] qu'il y a 45 décompositions additives à deux termes des nombres jusqu'à 10. Il juge qu'il n'est pas raisonnable de vouloir entraîner les élèves à toutes les connaître au-delà du nombre 5 et beaucoup plus profitable de les familiariser avec les stratégies de décomposition les plus utiles pour faciliter les calculs : n+1, 5+n (avec les doigts, les dés et ses « boîtes de Picbille »), doubles et doubles+1 (avec les configurations Herbinière-Lebert).

45 Yves Thomas, « Nombres et problèmes numériques au CP » », Primatheux.fr [En ligne]
46 Yves Thomas, « Eloge du dé », Primatheux.fr [En ligne]
47 Rémi Brissiaud, « Le nombre dans le nouveau programme maternelle : Deuxième partie ». *Café pédagogique* [En ligne]

B. Former plus régulièrement toute la suite des nombres (y compris 3) avec les dés/dominos

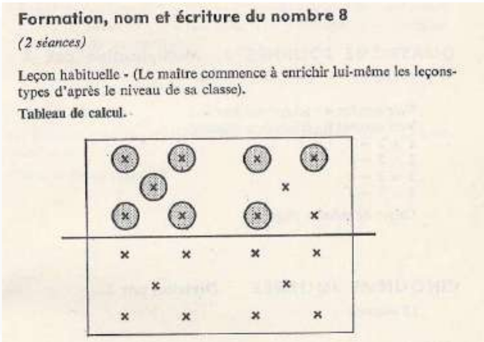
En 1950, Madeleine Abbadie, inspectrice de la Seine, fait un pas de plus par rapport à Châtelet en théorisant[48] la **formation plus régulière de la suite des nombres, y compris de 2 à 4** :

> *« Il est très important de respecter ces dispositions car le principe à faire connaître à l'enfant est que* ***chaque nombre est obtenu à partir du précédent par l'addition d'une unité. On ne doit donc jamais remanier le précédent groupement pour obtenir le nouveau.*** *»*



Abbadie, 1950

En 1967 Max Benhaïm aussi choisissait, dans *L'Enseignement du calcul CP*[49], de suivre cette organisation plus régulière.



Benhaïm, 1957

Rémi Brissiaud, qui avait toujours recommandé le repère 5, s'est rallié tardivement à la même configuration pour les dés (cf. image ci-dessous[50])


Brissiaud, 2015

---

48 On trouve trace de cette réorganisation dans un matériel concret proposé à la fabrication par la revue *L'Education enfantine* en 1949, introduit par Suzanne Herbinière-Lebert et présenté par M. Baujard : deux « planchettes » carrées munies aux quatre coins et au centre de pointes sur lesquelles peuvent être insérés des pions ronds troués en leur centre. Ces pions peuvent être ajoutés ou enlevés « pour réaliser tous les groupements globaux et toutes les combinaisons. » L'enfant doit anticiper le résultat d'un ajout ou d'un retrait ou dénombrer les jetons quand la planchette leur est montrée très brièvement. Les groupements « ''privilégiés'', mais non uniques », qui aident les enfants à mémoriser une quantité donnée » sont précisés pour les « institutrices débutantes ». Ces groupements devaient donc être assez répandus. Ils sont organisés comme ceux d'Abbadie.

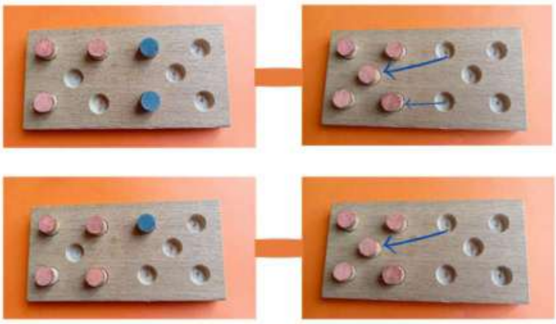
49 *Jour après jour. L'Enseignement du calcul. Cours préparatoire, livre du maître*, Hatier, 1967.

50 BRISSIAUD Rémi, « Le nombre dans le nouveau programme maternelle : Deuxième partie », *Café pédagogique*¸ 2015. [En ligne]

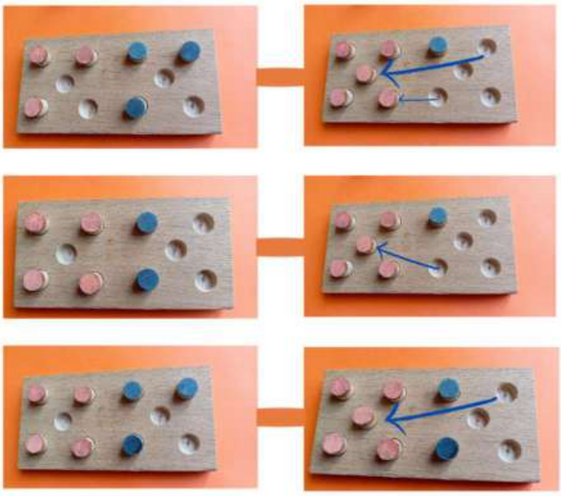
Pour s’appuyer sur le repère 5

Avec les dominos double-cinq

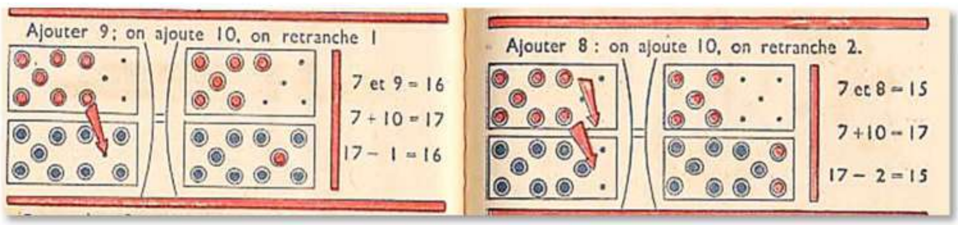
Grâce au domino double-cinq et à sa configuration conventionnelle en quinconce, il est possible d’enseigner une stratégie qu’on pourrait appeler de « passage par 5 » pour faciliter les premières additions de termes dont la somme n’excède pas 5.



On peut aussi enseigner une stratégie de « passage du 5 » pour faciliter les premières additions de termes dont la somme n’excède pas 10.



L’enfant poursuivra une stratégie analogue pour le passage de la dizaine, telle que le décrit Albert Châtelet dans son manuel pour le CP en 1947 (1ère édition 1934)[51].



[51] CHATELET Albert, *J'apprends les nombres* [livre de l’élève pour le CP], Bourrelier, 1947.

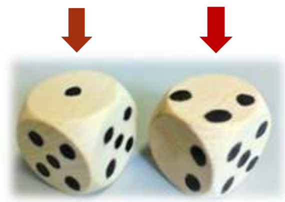
Avec les dés

Une première étape peut être l'entraînement aux décompositions en 5+n avant d'enseigner le passage du 5.

A. *forcer les dés à décomposer en n+1 et 5+n*[52]

Pour tous les jeux de dés de la classe, deux dés vierges peuvent être reconfigurés :

- l'un avec trois faces comportant chacune 5 points et trois faces comportant chacune 1 point.
- l'autre de 0 à 5 points sur chaque face.



Les décompositions mises en lumière sont ici l'itération de l'unité (n+1) et l'appui sur 5 (5+n).

B. *apprendre les stratégies de « passage par 5 » et de « passage du 5 » plutôt que de compter 1 par 1.*

Une fois appris 5+n, on peut introduire deux dés comportant chacun 0 à 5 points (ou 2 à 5 points, si l'on veut insister sur le passage du 5) et s'aider d'un domino troué pour prendre appui sur 5.

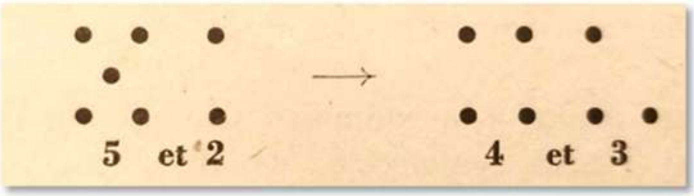
4 + 3 = 5 + 2 = 7

[52] En France, dans les années 1920, Suzanne Herbinière-Lebert proposait un jeu de dés pour entrainer le calcul de 5 + n. Elle utilisait deux dés en bois pyrogravés : le premier portait par exemple cinq points sur toutes ses faces ; le deuxième portait de 1 à 5 points. Cf. GARCIN F., « Cours Pauline Kergomard. Initiation sensorielle au calcul. Conférence Herbinière-Lebert (suite) », *L'Éducation enfantine*, n°6, 10 janvier 1934.

Risque des dés, même reconfigurés

Le point fort des dés est leur bon appui sur le repère 5.

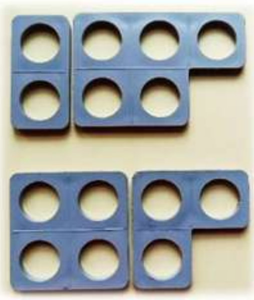
Leur point faible est bien décrit par Madeleine Abbadie en 1958 : même en adoptant la disposition qu'elle préconise pour les dés et dominos, « le principal inconvénient de cette disposition est qu'elle **ne permet pas, pour un nombre donné, le passage d'une de ses structures à une autre, sans déformer le groupement**. Comme on le sait, l'enfant, qui est encore, à cet âge, difficilement convaincu que le nombre reste le même quelle que soit la place occupée par les éléments qui le composent, reste **hésitant lorsqu'on veut lui faire constater que, par exemple, 7 c'est 5 et 2, mais aussi 4 et 3**.



Abbadie, 1950

Les deux figures ne sont pas du tout comparables. Est-ce bien toujours de 7 dont il est question, du même nombre 7 ? »[53]

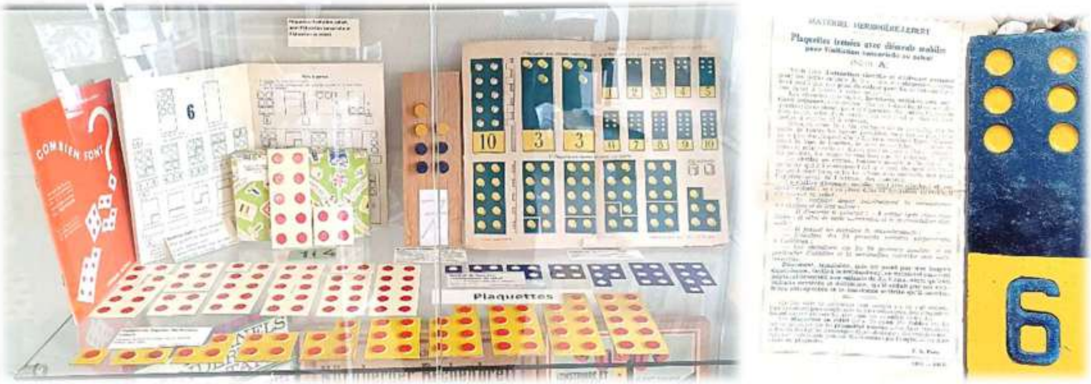
Suzanne Herbinière-Lebert invoquait un argument similaire en faveur de ses plaquettes dans la notice accompagnant ce matériel dans les années 1960 destinée « aux école maternelles et aux cours préparatoires ». L'autrice insiste sur l'intérêt que l'enfant ne déplace pas les ronds qui figurent les unités. Un bâton placé horizontalement ou verticalement suffit pour décomposer. « **Rien n'ayant été déplacé**, [l'enfant] admet plus aisément que ces sommes sont **équivalentes** (on sait en effet, depuis Piaget, que pour l'enfant de 5 à 6 ans la conservation des quantités n'est pas assurée quand la forme change). »



C'est plus évident avec les plaques de type Herbinière-Lebert (ici de la marque britannique *Numicon*), qui forment un nombre clairement et régulièrement à partir de *tous* les précédents.

[53] ABBADIE Madeleine et BROSSAT Paulette, *L'initiation au calcul dans les classes maternelles et enfantines*, Paris : Armand Colin, 1958.

C. Les plaques de type Herbinière-Lebert



Le matériel de Suzanne Herbinière-Lebert exposé au Musée de l'école

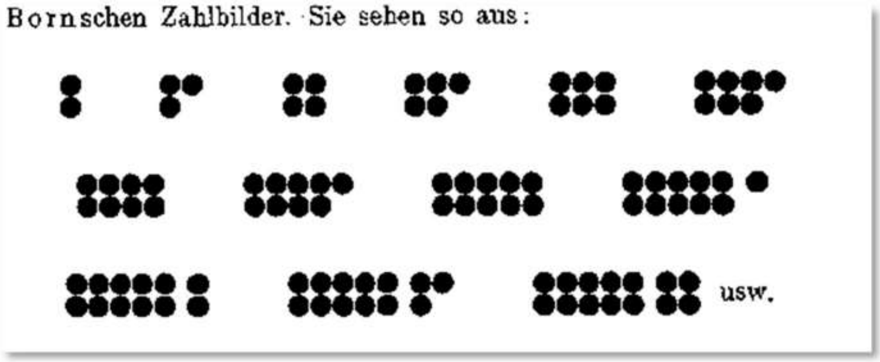
Le matériel allemand et belge exposé

Les panneaux explicatifs et le matériel américain de Catherine Stern exposé

Nous avons déjà rencontré plusieurs fois dans cette exposition les organisations d'unités par paires, connues en France sous le nom d'Herbinière-Lebert. Il est temps de rassembler les informations sur les différents matériels de cette famille et d'en souligner l'intérêt.

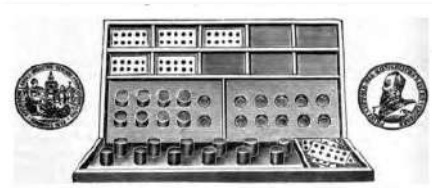
Généalogie des plaques Herbinière-Lebert

Premier à utiliser pour l'enseignement cette organisation de points dont on trouve des traces en Mésopotamie, le Berlinois Born présente en 1867 son « *Neuer Rechenapparat*[54] » : un panneau vertical comportant 100 disques sur 10 rangées de 10 disques chacune. Il est muni de tirettes permettant de cacher ou dévoiler un groupe de disques et d'en changer la couleur. Les configurations obtenues étaient de ce type[55] :



Ces configurations de points font partie de ce que les Allemands nomment « *Zahlenbilder* » (images-nombres) et Suzanne Herbinière-Lebert « figures numériques ». Rémi Brissiaud les appelait « collections témoins organisées » ou « nombres figuraux ». Les configurations de Born eurent une postérité longue et protéiforme dont les grands moments sont décrits ci-dessous pour la première fois[56].

54 Born, *Neuer Rechenapparat zur Veranschaulichung der Rechenoperationen an Zahlbildern mit wechselnden Farben*, Berlin, 1867.
55 Illustration tirée de KÜHNELL Johannes, *Neubau des Rechenunterrichts: ein Handbuch für alle, die sich mit Rechenunterricht zu befassen haben*, J. Klinkhardt, 1941
56 **L'étude détaillée** se trouve dans : Gonzague Jobbé-Duval, « Les plaquettes Herbinière-Lebert (1923). Born (1867), Schneider (1899), Brissiaud (1989), Numicon (1996) et au-delà, enquête sur une collection témoin organisée de manière à construire les nombres comme relations entre des quantités », blog *A tâtons* [En ligne].



Troelltsch

Les configurations de Born furent d'abord adoptées pour disposer des **cylindres dans les 10 trous des plaques rectangulaires** du *Nürnberger Rechenbrett* créé par l'Allemand Ernst Troelltsch (1857-1916) en 1893 dont les lointaines héritières sont les actuelles « cartes à points » de Jean-Luc Bregeon (et ses « Boîtes à nombres » éditées par Nathan) et, aux Etats-Unis, les « *Pairwise ten frames* ». Le musée en expose une réédition par le Musée de l'école de Nuremberg en 1925 ainsi que la version d'Eugen Koller vers 1935 : le *Rechenkasten* Nr. 2c (*Bornsches Zehnerbrett*). Au début des années 1960, Bourrelier édita le matériel de R. Pothier - « Dix bacs sur un plateau » (en vitrine) - qui disposait ses cubes comme Herbinière-Lebert (et admettait d'autres dispositions).

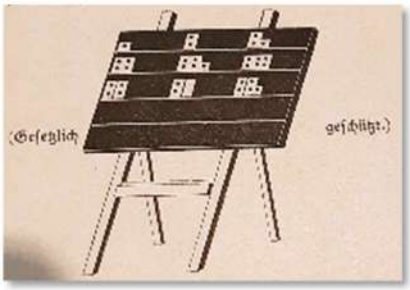
Troelltsch

Koller

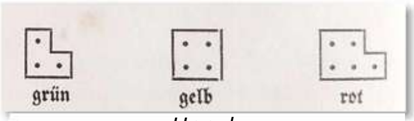
Pothier (Bourrelier)

Bregeon (Nathan)

Le premier à **découper les plaquettes *en suivant le contour des configurations*** de Born fut l'Allemand Georg Schneider (1865-1938) vers 1900 avec son *Rechenapparats*, suivi de près (1906 ?) par son compatriote plus influent Wilhelm Henck (1865- ?) qui mit des plaquettes cartonnées **à disposition des élèves** (cf. manuel en vitrine). L'Allemand Eugen Koller (en vitrine) en étendit la diffusion à partir de 1935 et bien après la Deuxième guerre mondiale. Suzanne Herbinière-Lebert utilisa des plaquettes similaires à partir de 1923 avec son « jeu B ». De manière plus confidentielle les



Schneider

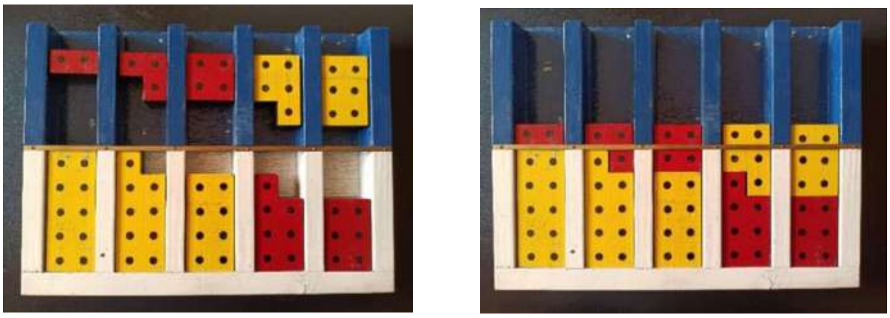


Henck

Allemands Charles Kölbel, Karl-August Quer (1891-1962) et Walter Eggestein (1902-1979) utilisèrent des plaquettes semblables.

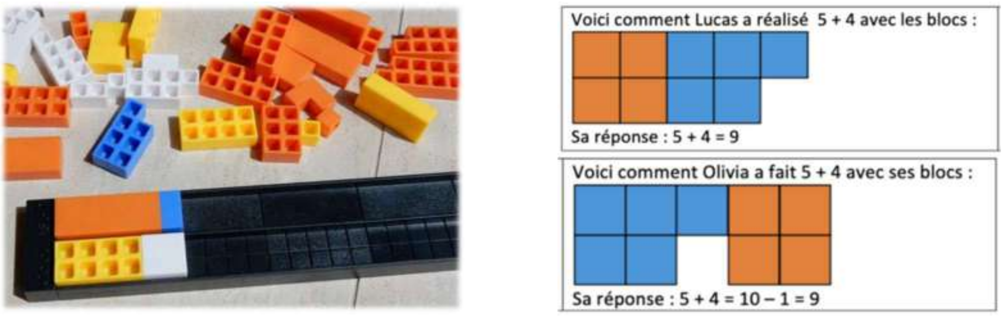
Koller

Plaques Herbinière-Lebert (jeu B), exposées au musée dans toutes les éditions sauf celle de 1931



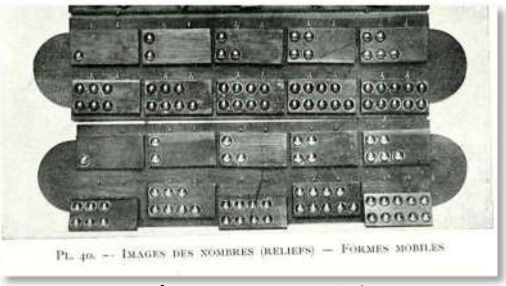
Matériel de Quer, édité en France sous le nom de « Cubus » (en vitrine), qui initie notamment au passage de la dizaine. France, années 1950-1960. Brevet allemand 1928

Parmi les nombreuses éditions contemporaines des plaquettes assemblables ; le musée expose le matériel « Calcul'As 3D », créé par le Belge Stéphane Hoeben et édité par Atzeo en 2010, qui propose d'intéressantes situations d'apprentissage.



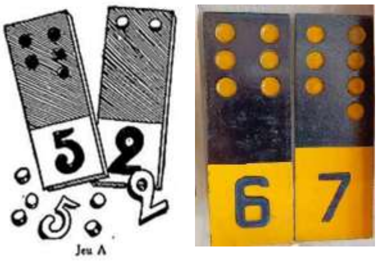
Calcul'as 3D (Atzéo)

Une autre matérialisation des configurations de Born consista en des **plaques ou cartons rectangulaires de mesure identique comportant 1 à 10 unités fixes**. La congrégation catholique belge des Frères de la Charité adopta l'usage de ces plaques au début du XXe siècle (voir livre en vitrine) pour les enfants avec déficience mentale. Le grand pédagogue allemand Johannes Kühnel en popularisa aussi l'usage, à partir de 1916, sous la forme de ce que nous appellerions aujourd'hui des « **cartes-éclairs** » (voir manuel en vitrine).



Frères de la charité

Le « jeu A » de Suzanne Herbinière-Lebert, créé en 1923 et disparu peu après la guerre, est sans doute le premier à insérer des **cylindres mobiles dans les 1 à 10 trous de plaquettes rectangulaires**. Catherine Stern (1894-1973) prit la relève après la Deuxième guerre mondiale, aux Etats-Unis, avec ses *Pattern Boards.* Ces deux matériels sont présentés pour la première fois dans un musée français.



Plaques Herbinière-Lebert (jeu A, 1931) exposées au musée

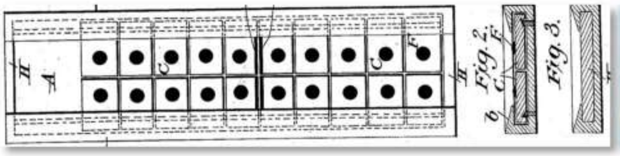

Pattern Boards (début 1960), de Catherine Stern, exposées au musée

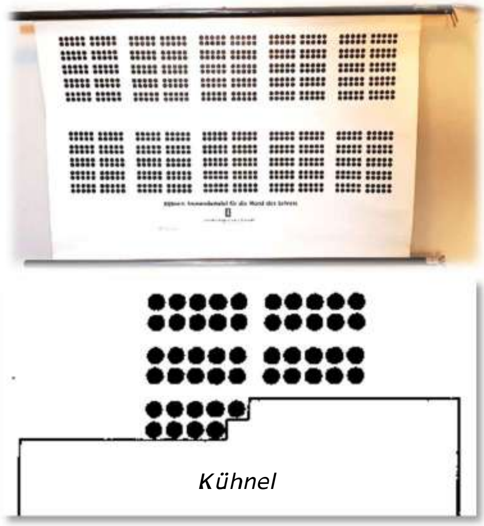
Dans les années 1970, un autre matériel exposé, *Multilink*, créé par Bob Stone (1934-2015), proposa aussi des *Pattern Boards*, en plastique, manifestement inspirés de ceux de Catherine Stern, adaptés à des cubes assemblables sur toutes leurs faces : les Multilink (contrairement aux cubes concurrents *Unifix*, assemblables sur une seule face, qui avaient, eux, des *pattern-boards* basés sur les dominos double-cinq).


Multilink Pattern Boards

George Schneider puis la congrégation catholique belge des Frères de la Charité utilisèrent un appareil, exposé au musée, qui construit chaque quantité à partir des unités de base sans pour autant que ce soient des cylindres placés hors du boitier. C'est un cadre rectangulaire dans lequel deux **rangées contigües de 10 pièces carrées peuvent être déplacés en coulissant** comme sur un boulier.

Nommé *Rechen-Federkästchen* par Schneider (*Counting Device* dans son brevet Etats-Unien de 1899, cf. schéma à gauche), le musée en présente un exemplaire belge très similaire de 1958 (à droite).





Kühnel

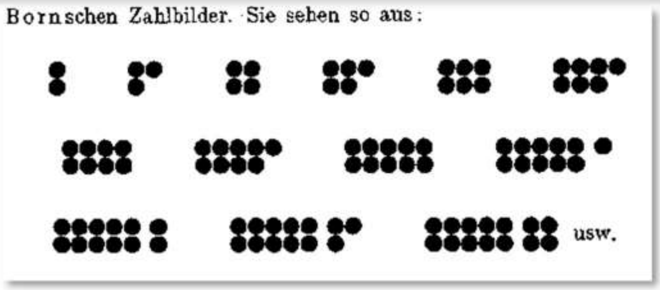
L'Allemand Johannes Kühnel popularisa durablement à partir de 1916 une autre matérialisation des configurations de Born, exposée au musée : des **tableaux de 10, 100 ou 1000 points, regroupés par dizaines, en partie occultables** par des caches opaques ou translucides découpés de manière à faire apparaître les différentes configurations de Born et matérialiser les additions et soustractions.

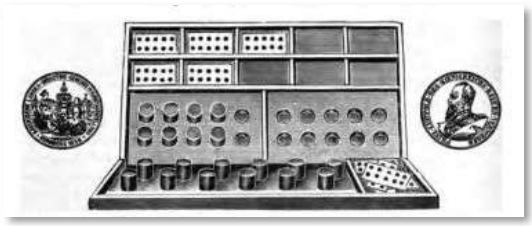
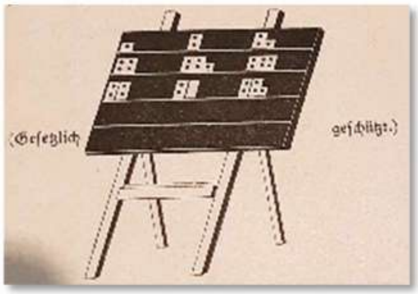
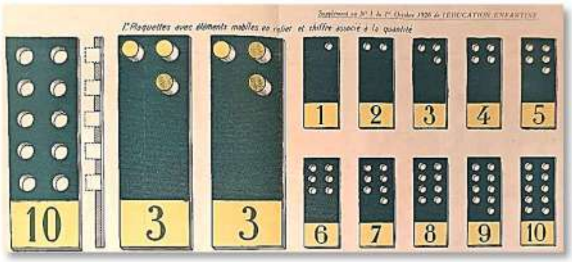
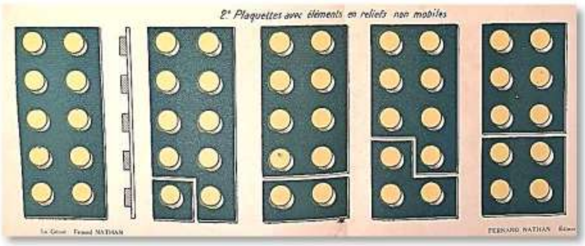
Parmi les outils plus récents il faut mentionner la particularité des *Numicon shapes*, exposées au musée, créées en 1996 par les Britanniques Romey Tacon, Ruth Atkinson et Tony Wing en s'inspirant explicitement du travail de Catherine Stern (et peut-être d'Herbinière-Lebert par le biais des ouvrages de Rémi Brissiaud). Les plaques Numicon sont **découpées comme les plaques assemblables d'Herbinière-Lebert mais sont trouées pour recevoir des cylindres-unités** comme les plaques Stern des cubes. Numicon fait ainsi revivre en un seul matériel les deux jeux originaux de Suzanne Herbinière-Lebert : les plaquettes trouées avec éléments mobiles cylindriques et les plaquettes au contour épousant la configuration des éléments fixes.

Numicon

Voici un tableau qui résume ces étapes en centrant le propos sur les premiers ancêtres germaniques, le matériel apparu en France en 1923 et la version britannique la plus répandue aujourd'hui.

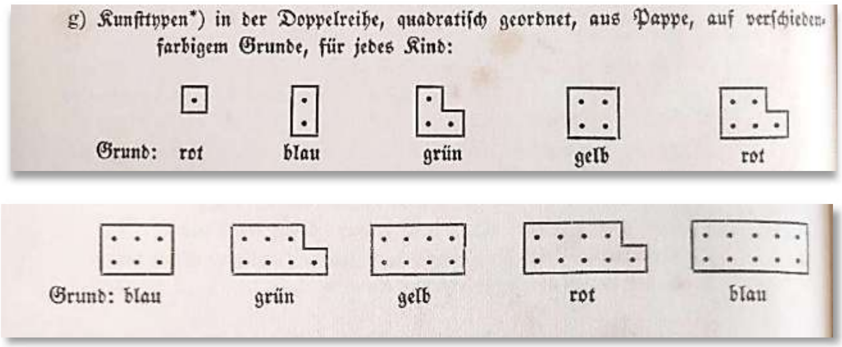
Les « *Zahlbilder* » (images des nombres) de l'Allemand Born (1867) : éléments fixes, sur un grand panneau, découverts par des planches coulissantes.



<table>
<tr><th>Unités déplaçables</th><th>Plaques assemblables</th></tr>
<tr><td>
Ernst Troelltsch :
« Nürnberger Rechenbrett », 1893</td><td>
Georg Schneider :
« Rechenapparats », 1900</td></tr>
<tr><td>
Herbinière-Lebert :
« Plaquettes trouées et chiffrées avec éléments mobiles » / « jeu A »
Créées en 1923, éditées en 1931 (Nathan).</td><td>
Herbinière-Lebert :
« Plaquettes en relief avec éléments fixes » / « Jeu B » / « Boutons d'or ».
Créées en 1923, éditées en 1931 (Nathan).</td></tr>
<tr><td colspan="2">
"Numicon shapes and pegs" (abréviation de « numeral icon »)
Depuis 1996 (Oxford University Press)</td></tr>
</table>

Wilhelm Henck (1865 - ?)

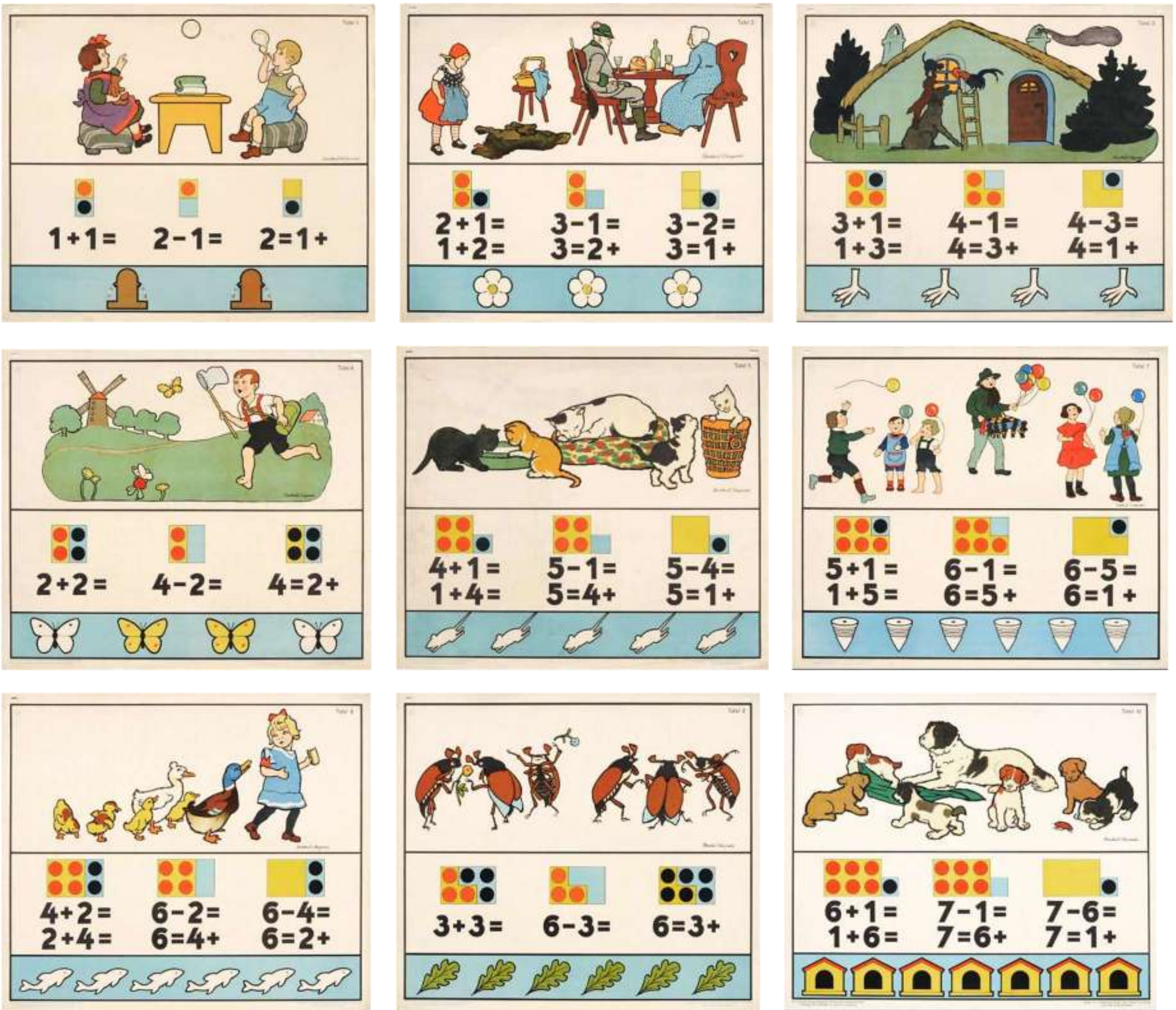
Henck est le premier, vers 1906, à faire manipuler aux élèves des plaquettes (en carton de diverses couleurs) de type Herbinière-Lebert.

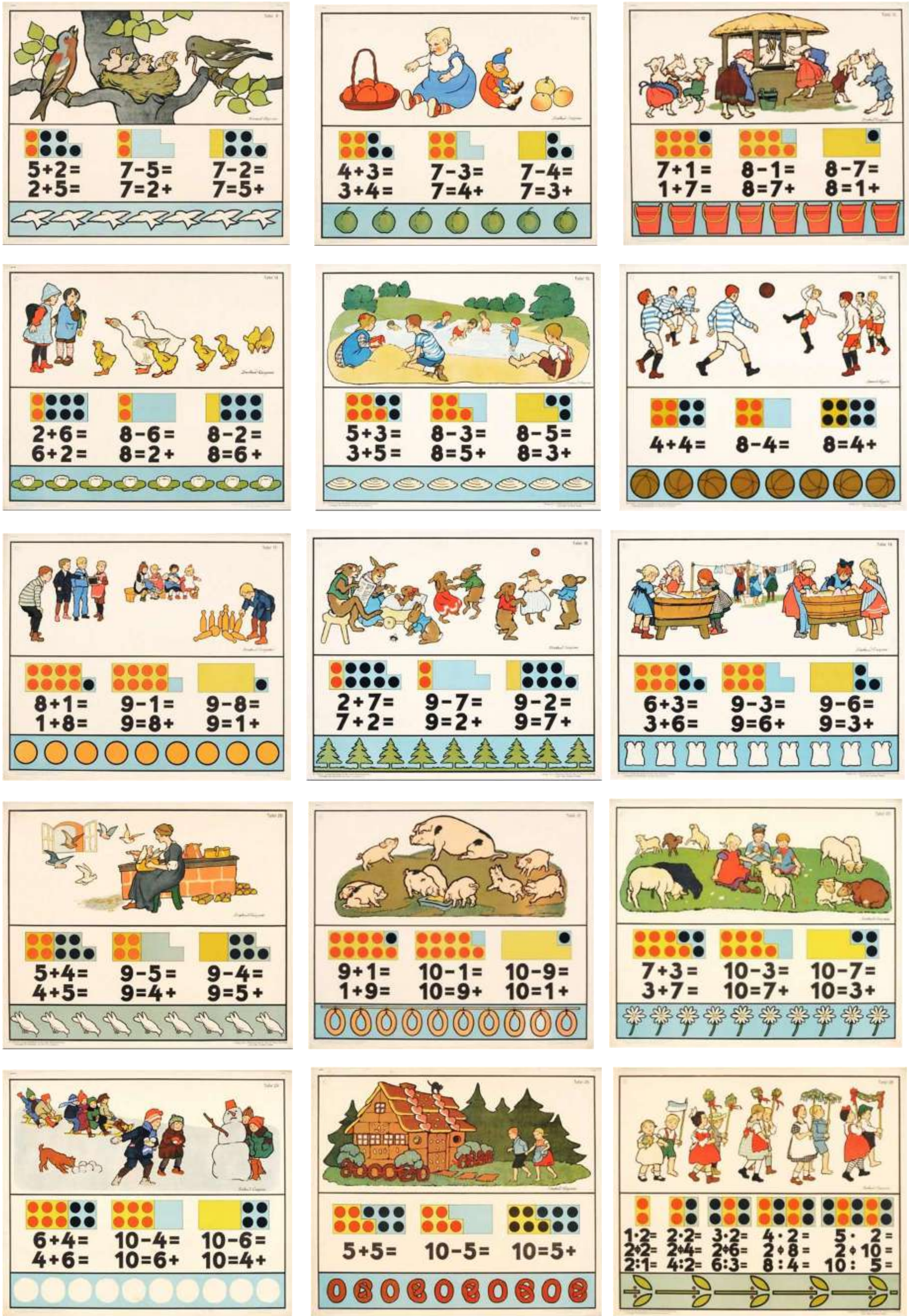

g) Kunsttypen*) in der Doppelreihe, quadratisch geordnet, aus Pappe, auf verschiedenfarbigem Grunde, für jedes Kind:

Grund: rot blau grün gelb rot

Grund: blau grün gelb rot blau

Il affiche en classe les décompositions des nombres, illustrées ici par Gertrud Caspari vers 1920-1930, sous le nom *Farbige Wandbilder für den ersten Rechenunterricht*. Deux affiches sont accrochées pour l'exposition au Musée de l'école. Chaque illustration permet de raconter des histoires avec les nombres.





Deux affiches manquent ici à la série complète.

Suzanne Herbinière-Lebert (1893-1985)

1913 : Institutrice stagiaire après un brevet supérieur de commerce, sans avoir suivi les cours de l'Ecole Normale.

1923 : elle crée ses plaquettes.

1927 : publication de ses *Exercices graphiques d'attention*, les premiers en France et présentation, dans la revue *L'Education enfantine* (1927-1929), de sa méthode complète.

1931 : organise à Paris le Congrès international de l'enfance. Nathan édite ses plaquettes.

Plaques géantes exposées au musée

1934 : inspectrice académique à Dijon.

1940 : inspectrice générale des écoles maternelles en novembre (l'armistice est en juin).

1950 : présidente de l'Organisation mondiale pour l'éducation préscolaire (O.M.E.P.) après avoir participé à sa fondation.

1952-1963 : chargée d'une « mission permanente d'inspection des écoles normales de filles, des écoles maternelles et jardins d'enfants ainsi que des personnels de l'inspection départementale des écoles maternelles dans tous les départements métropolitains », jusqu'à sa retraite.

Elle dirige pendant 30 ans la revue *L'Education enfantine* et la collection de livres du même nom parus chez Fernand Nathan.

UNE NOUVEAUTÉ SENSATIONNELLE

MATÉRIEL FONDAMENTAL
pour l'enseignement du Calcul

PLAQUETTES HERBINIÈRE-LEBERT

pour l'éducation sensorielle
et l'initiation sensorielle au calcul

Guidée par ce principe montessorien qui consiste à matérialiser chaque quantité et à la présenter sous la forme d'un tout, Mme Herbinière-Lebert, modifiant heureusement l'idée initiale, adopte la présentation des quantités sous l'aspect de **figures numériques,** *qui prépare leur analyse, favorise leur perception intuitive et permet l'apprentissage des nombres par la méthode globale.*

Jeu A

Ce matériel nouveau comprend deux séries de plaquettes qui correspondent à deux étapes de l'initiation :

Jeu A. *Les plaquettes trouées et chiffrées avec éléments mobiles.*

Jeu B. *Les plaquettes en relief avec éléments fixes.*

Les plaquettes trouées sont au nombre de dix ; elles ont respectivement 1 à 10 trous ; elles sont accompagnées d'un chiffre mobile et de bouchons aux sections coloriées, chacune d'une couleur différente, les mêmes pour chaque bouchon.

Ce matériel, entre les mains d'enfants de 3 à 4 ans, sert de jeu sensoriel visuel et d'adresse motrice.

Mais il conduit peu à peu l'enfant de **4 à 6 ans** *à la connaissance globale, puis analytique des quantités qui peuvent se décomposer aisément, grâce à la mobilité des éléments à compter ; les trous à fond coloré conservent la* **figure** *de la quantité étudiée, qui demeure un* **témoin** *de l'expérience.*

Le chiffre mobile retiré, il en reste le dessin coloré en bleu dans la plaquette.

La seconde série comprend 10 plaquettes avec éléments fixes en relief, permettant d'associer les perceptions tactiles aux perceptions visuelles.

Elles présentent les quantités sous la forme d'un tout, qui n'est décomposable que par la vue ; elles sont un acheminement vers l'abstraction.


Jeu B

Ces deux séries de plaquettes, d'une heureuse nouveauté, se prêtent à une infinité de combinaisons différentes, permettent de franchir toutes les étapes depuis la période purement sensorielle, qui peut commencer très tôt, vers la troisième année, jusqu'à la pratique concrète de la numération, de l'addition, de la soustraction, même avec retenues, et de la multiplication.

Faciles à individualiser, les plaquettes Herbinière-Lebert peuvent aussi servir à plusieurs enfants à la fois.

Elles constituent un matériel fondamental pour l'enseignement du calcul aux enfants de 4 à 7 ans, ainsi qu'aux enfants anormaux.

Matériel très robuste.

N° 1069.	Le jeu **A.** (plaquettes chiffrées) de dix éléments, avec accessoires	**30 fr. »**
N° 1070.	Le jeu **B** (plaquettes en relief) de dix éléments.	**10 fr. »**
N° 1071.	Bouchons aux sections colorées. *Les 50*	**3 fr. 50**
N° 1072.	Plaquettes figurant en relief les dizaines. *Les 5.*	**10 fr. »**

F. NATHAN. ÉDITEUR

Journal des instituteurs et institutrices, n°20, 6 février 1932. (Plaquettes créées en 1923 et éditées en 1931)

Rémi Brissiaud remet en valeur les plaquettes

Les plaquettes Herbinière-Lebert assemblables ont été largement utilisées jusqu'aux années 1970. C'est Rémi Brissiaud qui les a revalorisées depuis 1989 (avec d'autres « collections-témoins organisées ») dans le souci d'éviter chez les élèves le « comptage-numérotage » et de favoriser les stratégies de décomposition-recomposition qui permettent d'accéder au nombre comme « relation entre des quantités ».

Jugeant en 1989 que les leçons des années 1960[57] proposées avec les plaques-nombres rendaient les élèves « très dépendants de l'adulte, tant dans la gestion de l'activité que dans son évaluation »[58], Brissiaud souhaita faire de ce matériel un « outil de communication dans la relation maître-élève ». En 1994, dans un *Livre du maître* pour la grande section de maternelle[59], il proposait des activités « ludiques » en ce sens et expliquait comment fabriquer le matériel Herbinière-Lebert avec du carton. Il développait aussi par ailleurs des « Albums à calculer », toujours édités (Retz), qui s'appuient sur les configurations Herbinière-Lebert (ou bien sur celles du dé reconfigurées par ses soins).

Présentation du matériel et/ou introduction d'un nouveau nombre

<u>Objectif</u> : reconnaître dans les plaques-nombres des configurations connues et s'appuyer sur elles pour analyser les autres plaques sous forme de décompositions. Pour introduire un nouveau nombre, toujours commencer par le présenter comme un nombre déjà étudié « et encore 1 ».

<u>Déroulement</u> : Des plaques des différents nombres sont posées au sol dans le « coin regroupement ». L'enseignant.e demande : « Combien y a-t-il de ronds sur cette plaque ? » Pour illustrer une autre stratégie que le comptage 1 à 1, inviter les élèves à montrer comment telle plaque est équivalente à la réunion de deux autres. Une

[57] FARENG R. & FARENG M., *L'apprentissage du calcul avec les enfants de 5 à 7ans. Manuel de pédagogie pratique pour les écoles maternelles, les classes enfantines, les jardins d'enfants et les classes préparatoires*, Paris : Fernand Nathan, série « Comment faire ? », collection « L'Éducation enfantine » dirigée par S. Herbinière-Lebert, 1966. Préface de Suzanne Herbinière-Lebert.
[58] BRISSIAUD Rémi, *Comment les enfants apprennent à calculer*, Retz, 2003 (1ère édition 1989), p. 170.
[59] BRISSIAUD Rémi, *J'apprends Les Maths - Livre Du Maître, Grande Section De Maternelle*, Retz, 1994.

fois le principe compris, pour inciter les élèves à décomposer, ne montrer la plaque que brièvement : ils comprendront l'avantage de repérer la configuration du 4 et celle du 2 plutôt que de compter 1 à 1.

« Album à calculer »

Des animaux sont placés sur la page de gauche selon la disposition d'une plaque Herbinière-Lebert[60]. En avançant dans l'album, certains animaux sont passés sur la page de droite tandis qu'un rabat vient cacher la page de gauche[61]. L'enseignant.e

« Dans l'image, il y a 5 lapins dans 5 chapeaux. 2 en bas, 2 au milieu et 1 en haut. »

« Les lapins sous le rabat sont sur la piste du cirque. Combien de lapins sont sur la piste ? »

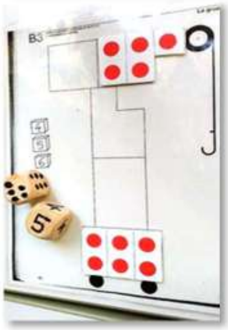
« Les lapins sous le rabat sont dans les chapeaux. Combien de lapins sont dans les chapeaux ? »

Editions Retz

rappelle qu'il y a *x* animaux en tout et demande combien il en reste sur la page de gauche. L'élève visualise la disposition de base des *x* animaux pour imaginer l'emplacement vide et trouver combien il reste d'emplacements occupés par des animaux. On vérifie en soulevant le rabat. Les élèves sont ainsi incités « à se donner une image mentale de la constellation de base et à raisonner sur cette image mentale comme s'ils avaient cette constellation sous les yeux. »

60 Brissiaud propose aussi des albums avec des collections-témoins organisées à l'aide du repère 5.
61 C'est la 3ème phase d'utilisation de l'album. On travaille d'abord sans rabat puis en cachant la page de droite.

Apparier nombres et plaques



Deux à six joueurs ont chacun un dessin (maison, véhicules...) composé avec les contours de plusieurs plaques nombres. Il faut obtenir avec un dé (chiffres ou constellations Herbinière-Lebert) les plaques nécessaires pour remplir tout le dessin.

Décomposer les nombres pour remplir une piste

Remplir une piste depuis le départ jusqu'à l'arrivée, sans laisser de trou. Cette dernière exigence oblige à décomposer les nombres. Par exemple lorsqu'un joueur obtient successivement avec le dé les nombres 7 et 8 (impair puis pair), il ne peut pas poser la plaque 8 sans laisser un trou ; il doit donc l'échanger contre les plaques 7 et 1 ou bien 5 et 3. La situation est encore plus fréquente quand les joueurs rencontrent un virage.

Trouver le complément

Un meneur de jeu tire une carte avec une interrogation écrite et imagée. Par exemple : « Pour faire 5 j'ai déjà 2. Combien faut-il encore ? ». Le joueur interrogé répond puis valide sa réponse en posant la plaque-nombre correspondante sur le gabarit tracé sur la carte. Si sa réponse est juste, il gagne la carte et la plaque.

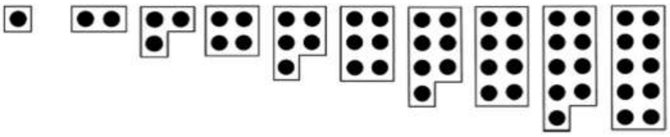
Pour l'école élémentaire, Rémi Brissiaud s'appuie encore sur les configurations Herbinière-Lebert appelés « nombres comme Perrine » dans ses manuels *J'apprends les maths avec Picbille* (ou *avec Tchou*) édités chez Retz. Perrine est le personnage qui leur est associé, en compagnie de Dédé (constellations du dé) et de Picbille/Tchou (jetons alignés dans une boîte de 2x5 compartiments avec rabats).

Editions Retz

D’autres situations d’apprentissage

Voici d’autres situations possibles, décrites succinctement[62], avec les plaquettes assemblables et avec les plaquettes trouées. « Au marché » et « Tape juste » sont proposées aux jeunes visiteurs durant l’exposition au Musée de l’école (Chartres).

« Au marché » (MS➔CP)



« Aujourd’hui on va jouer au jeu du marché. Des élèves vont vendre des images/objets et d’autres élèves vont les acheter avec les plaques-nombres. Mais c’est un marché très spécial où les gens apprennent à réfléchir sur les nombres, alors on doit payer avec au moins deux plaques-nombres. ».

L’activité est proposée de manière régulière en grand groupe et de temps à autre avec 5 ou 6 élèves pour instituer les règles du jeu, discuter des stratégies gagnantes et repérer les élèves ayant un plus grand besoin d’étayage lors de la séance en grand groupe.

En maternelle un coin « boutique » pourra être installé dans la classe de manière permanente avec les mêmes règles de jeu et les étiquettes des nombres 2 à 5 pour la moyenne section, 4 à 10 pour la grande section.

Des étiquettes de prix plastifiées sont réparties sur les tables des marchand-e-s, dans le but de permettre à des élèves de tous les niveaux de réussir et de progresser selon leur degré de connaissance des nombres et de leur écriture chiffrée. L’étiquette comprend le gabarit de la plaque-nombre avec les ronds dessinés (pour validation par superposition des plaques) ainsi que le chiffre, ou bien seulement le chiffre et le gabarit est tracé au revers de l’étiquette pour validation.

[62] **Description complète** dans : Gonzague Jobbé-Duval, « Les plaquettes Herbinière-Lebert (1923). Born (1867), Schneider (1899), Brissiaud (1989), Numicon (1996) et au-delà, enquête sur une collection témoin organisée de manière à construire les nombres comme relations entre des quantités », blog *A tâtons* [En ligne].

Les client-e-s disposent éventuellement d'un cache individuel coloré translucide qui permet de décomposer physiquement les collections de ronds sur les étiquettes des marchand·e·s. Découpé aux dimensions d'une plaque de 10 ronds il a un coin rogné en carré de la dimension d'une plaque de 1 rond.

Les client-e-s peuvent acheter les images/objets avec des plaques-nombres disposées à distance sur une table ou au sol.

Les client.e.s peuvent acheter librement mais en respectant des règles : on n'achète qu'une chose à la fois, au prix indiqué sur les étiquettes ; on doit obligatoirement donner au moins deux plaques-nombres et jamais uniquement des plaques de un rond. Les marchand.e.s veillent à ce que les deux plaques de ronds fassent bien ensemble le nombre demandé.

Chacun est attiré soit par un nombre déjà connu, soit par un nombre qui représente un défi, soit par un objet plaisant. Les objets valant une quantité de ronds peu élevée sont souvent plus vite épuisés, ce qui incite les élèves à sortir de leur zone de confort, donc à procéder par essai-erreur pour recomposer des nombres moins connus.
De même, si les décompositions n+1 sont privilégiées par les élèves, la rareté croissante des plaques de 1 incite à essayer d'autres décompositions moins familières.
En cas de dispute pour une image, cette dernière appartient à la première personne qui pose ses plaques (et pas à la première personne qui l'a vue).

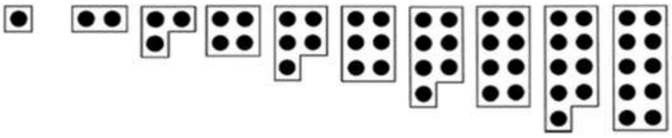
En grande section et en CP, les marchand-e-s ont chacun-e le même objectif à atteindre : x ronds collectés sur une feuille A3 où sont dessinées 10 plaques de 10 ronds. Ils cèdent leur place à d'autres quand l'objectif est atteint et remettent leurs plaques-nombres dans le jeu.

Le jeu s'arrête quand, au choix :
- l'enseignant-e juge que l'investissement des élèves a flanché (la séance dure souvent largement plus que 30 minutes),
- au bout d'un temps défini,
- quand les marchand-e-s n'ont plus rien à vendre,
- quand des constructions ou des puzzles ou ont été complétés par les pièces achetées.

En bilan, l'enseignan-t-e interroge la classe sur les manières de composer tel ou tel nombre. Pour les nombres jusqu'à 6, tous les élèves lèvent les doigts des deux mains en silence. A partir de la fin de grande section, on peut poser des questions plus difficiles, en s'appuyant éventuellement sur un affichage au tableau :

- Quels sont les nombres que je peux faire en utilisant uniquement des plaques identiques ?
- Quels sont les nombres que je peux faire avec uniquement des 1 ? des 2 ? des 3 ? des 4 ? des 5 ?

« Jour de soldes » : rendre ce qui est en trop (GS-CP)



Consigne

1/ Mettre en scène la situation devant toute la classe :

« Voici un nouveau jeu. C'est le jour du marché aux images et aujourd'hui elles ne sont pas chères Elles valent de 1 à 5 ronds.

- Yacouba, on dit que je suis le marchand et toi tu es le client. Le prix de mes images est affiché sur cette feuille. Elles valent combien ?
- 4 ronds.
- Oui. Pour acheter mon image, va chercher une plaque sur les tables du fond.
- Je n'ai pas trouvé de plaque de 4 ronds. Il n'y a que des plaques de 5, 6, 7, 8, 9, 10.
- On va essayer quand même. Mes images valent 4 ronds. Est-ce que dans 5 il y a 4 ?
- Oui il y a 4 et 1.
- Et bien donne-moi 5.
- Voilà 5.
- C'est trop. Je prends 4 [je pose mon gabarit de 4 sur le bas de la plaque de 5. Ce qui est en trop apparait immédiatement] et je te rends ce qui est en trop : 1 [Je lui donne une plaque de 1 et une image en échange de sa plaque de 5].

2/ Questions des élèves puis formulation de la consigne générale :

« Les client.e.s peuvent acheter librement mais en respectant des règles : on n'achète qu'une chose à la fois, au prix indiqué sur les feuilles. Les marchand.e.s n'ont pas le droit de refuser de vendre et ils doivent rendre les ronds en trop. »

Déroulement

Les client.e.s ont à leur disposition sur deux tables des plaques de 5 à 10 ronds.
Les marchand.e.s, sur deux autres tables, vendent des images qui valent de 1 à 5 ronds. Le prix des images est affiché en chiffre et chaque marchand.e dispose d'un gabarit en carton découpé comme la plaque-nombre correspondante et ne comportant pas de ronds. Elle/il dispose aussi d'un stock de petite monnaie (plaques de 1 à 5 ronds).

Au fur-et-à-mesure du jeu, les client.e.s disposent de plus de « petite monnaie » et peuvent ainsi donner le montant exact. Le jeu s'arrête quand les client.e.s n'ont plus de quoi acheter les images.

Construire les nombres avec les plaquettes trouées (PS➔CP)

Voici quelques situations présentées dans l'exposition. Le jeu « Tape juste » était mise à disposition des jeunes visiteurs.

Etape 1 (inspirée de Suzanne Herbinière-Lebert)

Disposer, selon le niveau de l'enfant, les 2 à 10 plaquettes trouées côté à côte et enlever tous les cylindres qu'on dispose en tas sur la table.

- L'enfant prend 1 cylindre en disant « un » (ou « un cylindre ») puis il le place dans le trou de la plaquette comptant un seul trou. Il trace avec son doigt le chiffre 1 écrit au bas de la plaquette en redisant « un ».
- Il prend ce cylindre en disant « un » et le place dans un trou de la plaquette suivante puis il prend un cylindre dans le tas en disant « et encore 1 » et il le place dans le deuxième trou en disant « ça fait deux ». Il trace avec son doigt le chiffre 2 au bas de la plaquette en redisant « deux ».
- Il prend ces deux cylindres en disant « deux » et les place dans deux trous de la plaquette suivante puis il prend un cylindre dans le tas en disant « et encore 1 » et il le place dans le troisième trou en disant « ça fait trois ». Il trace avec son doigt le chiffre 3 au bas de la plaquette en redisant « trois ».
- Et ainsi de suite. Les nombres suivants ne sont étudiés que si les précédents sont bien compris.

Etape 2

Les plaquettes que l'enfant connait sont ensuite mélangées et l'enfant les remet dans l'ordre en nommant les quantités.

Etape 3

L'enfant décompose chaque quantité (celles déjà construites avec l'itération de l'unité) en retournant certains cylindres. Soit il nomme les décompositions avant de vérifier en retournant les cylindres, soit s'il est encore en phase de découverte, il mène ses recherches en retournant d'abord les cylindres puis en formulant les décompositions.

Etape 4 (MS-CP) : jeu **« Tape juste »**

A l'enfant (ou groupe d'enfants) est présenté une des plaquettes trouées qui représente un nombre qu'il connaît bien. L'objectif est de trouver les collections représentant le même nombre que celui de la collection témoin organisée, en s'appuyant sur ses décompositions, sans compter 1 à 1.

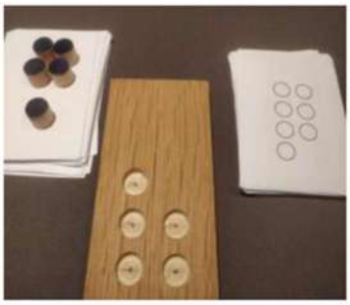
Au début de la partie on aura soin de demander aux enfants de dire différentes façons de « faire » le nombre en question et de retourner les jetons pour visualiser les différentes décompositions.

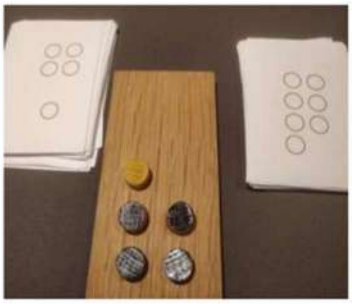
Devant la plaquette sont disposés deux tas de cartes comportant des collections de cercles. L'enfant doit taper sur la carte représentant la même quantité que celle de la collection témoin organisée sur la plaquette.

La validation est faite :

- soit en prenant les cylindres des plaquettes pour les disposer sur les cercles de la carte par correspondance terme à terme,
- soit en retournant certains cylindres de la collection témoin pour la décomposer,
- soit plus simplement en séparant du doigt, d'un bâtonnet ou d'un cache translucide les deux groupes de la collection-témoin composant la quantité.


Situation de départ


Validation (1ère manière)

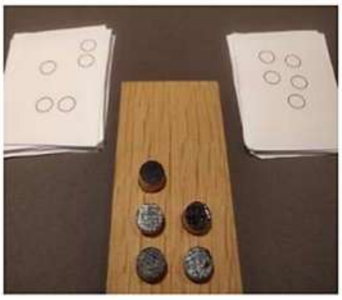

Validation (2ème manière)

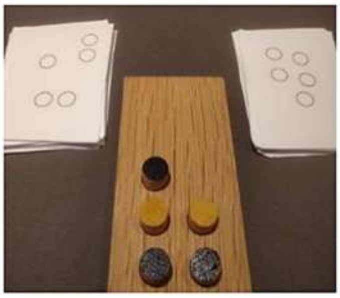
Le principal moyen d'éviter que l'enfant compte 1 à 1 est de lui rendre cette stratégie plus couteuse ou impossible par la rapidité exigée. Ici il doit dénombrer avant les autres joueurs.

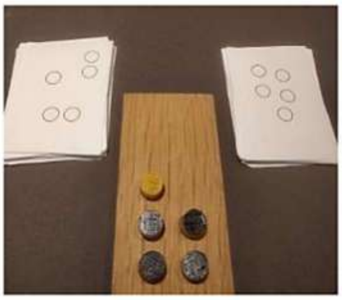
Il est important d'avoir deux tas de cartes et de découvrir deux cartes à la fois afin que, l'enfant ayant un choix à faire, il ne se précipite pas pour taper le premier sur la carte sans réfléchir. Si l'enfant a, de manière répétée[63], du mal à inhiber l'envie de taper le premier sur n'importe quelle carte, lui donner comme pénalité de passer le prochain tour.

Les cartes sont du type suivant :

- Cartes avec configurations Herbinière-Lebert (identiques à celles des plaquettes).
- Cartes avec configurations Herbinière-Lebert dont deux groupes ont été clairement séparés (décomposition déjà faite).
- Cartes avec configurations du dé (mettant en valeur 5+n) et d'autres collections-témoins organisées conventionnelles mettant en valeur certaines décompositions (doubles, 5+n, appuyées sur repère 3, géométriques, etc.)
- Cartes avec collections non conventionnelles à organiser mentalement (compétence très importante qui est beaucoup facilitée par l'usage de collections-témoins organisées dont on aura travaillé les décompositions)
- Toutes les cartes ensemble.







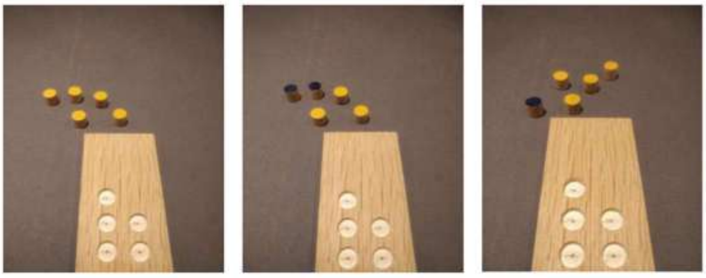
Une autre modalité de jeu, conçue spécialement **pour organiser mentalement des collections,** remplace les cartes par les cylindres eux-mêmes, ce qui rend la validation plus rapide en plaçant les cylindres sur les plaquettes déjà vides :

- Cylindres de deux couleurs (décompositions déjà faites), ou bien
- Cylindres d'une seule couleur.

Dans ce cas il est trop compliqué de présenter simultanément deux collections de jetons. On présentera donc plutôt (ce qui est aussi intéressant) deux plaques avec collections-témoins organisées représentant des quantités proches. Les jetons sont disposés par l'enseignant.e à l'abri des regards (derrière un livre ouvert à la verticale)

[63]Il ne s'agit pas de sanctionner l'erreur mais l'absence de réflexion.

pour éviter le comptage 1 à 1 et découverts d'un coup. Les élèves doivent désigner la bonne plaque et ils vérifient en plaçant les jetons sur cette dernière (cf. illustration ci-contre : un élève a avancé la plaque de 5 et s'apprête à poser les jetons sur la plaque pour valider son choix).



Tous les élèves ayant désigné la bonne plaque gagnent un point. Celle ou celui qui l'a désignée avant les autres gagne un point supplémentaire.

D'autre situations possibles en 4ème étape :

« Pim Pam Poum »

Plusieurs plaquettes trouées représentant des nombres bien connus des enfants, cachées sous un carton ; les cylindres sont disposés sur la table en deux tas : 10 d'une couleur et 10 d'une autre.
Deux joueurs. L'un avance une plaquette trouée devant l'autre joueur et, après avoir dit « Pim Pam Poum », il la replace sous le carton avant que l'autre joueur ait eu le temps de compter les trous 1 à 1. L'autre joueur prend autant de jetons et les place dans les trous de la plaquette dévoilée pour valider.

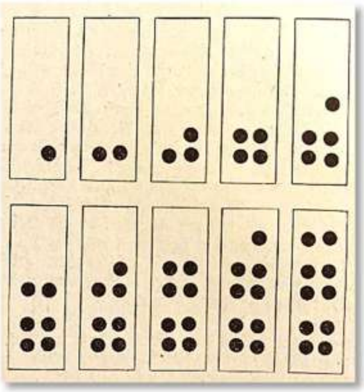
« Minute ! »[64]

Trois plaquettes trouées munies de leurs cylindres sont disposées devant les deux joueuses. Un paquet de cartes, comportant uniquement des représentations de ces quantités (différentes organisations, cf. « Tape juste »), est posé face cachée.
Une joueuse retourne un sablier d'une minute. L'autre joueuse fait rapidement défiler les cartes et les pose devant l'une ou l'autre des collections-témoins des plaquettes pour qu'il y ait « autant de ronds ».
Au bout d'une minute les deux joueuses valident chaque association de carte et font un tas de toutes les bonne réponses. Elles vérifient oralement au moyen des décompositions ou bien (surtout en cas de désaccord ou de doute) en déplaçant les jetons sur les cartes. Le nombre de cartes de la joueuse est son record à battre la prochaine fois. Ensuite on inverse les rôles. Ou bien les deux joueuses jouent ensemble pour discuter des choix de rangement.

[64] Inspiré par le « rangement rapide » d'Yves Thomas et Magali Hersant, Maths à grands pas (GS), Retz, 2018.

D. Configurations de Lay

Nous avons vu précédemment que deux représentations voisines des nombres ont été les grandes concurrentes des premières expérimentations didactiques : celle de Born (Herbinière-Lebert en France) et sa variante proposée par W. A. Lay, auteur en 1898 de *Führer durch den ersten Rechenunterricht*[65] (exposé au musée) et initiateur des premières expériences scientifiques de didactique des mathématiques. Born dispose les paires de point à équidistance les unes des autres tandis que Lay propose une organisation « quadratique » ou « quadrangulaire »[66] (*quadratische Zahlbilder*) : après deux paires de points groupés en carré, la paire suivante est à plus grande distance de la précédente[67].



Ces constellations sont encore utilisées aujourd'hui en Belgique et aux Pays-Bas.

Lay chercha à prouver que sa configuration de points permettait plus facilement aux élèves de dénombrer une quantité quand elle était dévoilée suffisamment brièvement pour ne pas pouvoir être comptée un à un. Il utilisa après Troelltsch une boîte avec des trous mais disposés selon sa configuration quadratique et sans cylindres bicolores[68]. Elle comptait de 20 à 100 trous.

« Selon mes investigations [...], les images quadratiques des nombres sur ma machine à calculer [...] sont nettement supérieures aux images numériques de Born sur le tableau de calcul de Nuremberg de M. Troelltsch [...]. Malgré tout, les images des

---

65 LAY W.A., *Fuhrer durch den ersten Rechenunterricht*, Wiesbaden, 1898. [Version révisée en 1907].
66 Comme traduit Alice Descoeudres.
67 **Description complète** dans : Gonzague Jobbé-Duval, « Les plaquettes Herbinière-Lebert (1923). Born (1867), Schneider (1899), Brissiaud (1989), Numicon (1996) et au-delà, enquête sur une collection témoin organisée de manière à construire les nombres comme relations entre des quantités », blog *A tâtons* [En ligne].
68 *Bericht über den I. Internationalen Kongress für Schulhygiene*, Verlag von J. L. Schrag, 1904. P. 357.

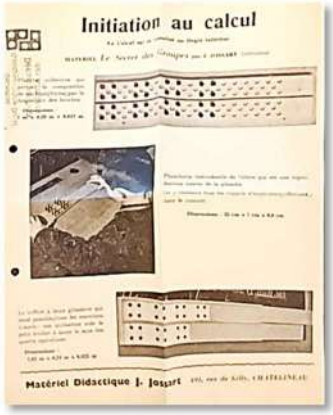
nombres de Born sont bien supérieures aux rangées de doigts et aux machines à calculer. »[69]

Les matériels qui succéderont à celui de Lay selon la même organisation utiliseront la plupart des formes et procédés utilisés par les matériels adoptant la configuration de Born… *mais pas ceux des plaquettes Herbinière-Lebert découpées autour des points*, ce qui n'est pas sans importance.

Dès 1916 la pédagogue **Alice Descœudres** (1877-1963, chargée du cours d'éducation spéciale à l'Institut J.-J. Rousseau de Genève) s'en inspire pour une large part de son enseignement du calcul publiée dans *L'Éducation des enfants anormaux*[70] (en vitrine). Descœudres était une figure de l'éducation nouvelle ; son livre fut réédité quatre fois et traduit en sept langues ; elle contribua au Congrès international de l'enfance de 1931 organisé par Suzanne Herbinière-Lebert.

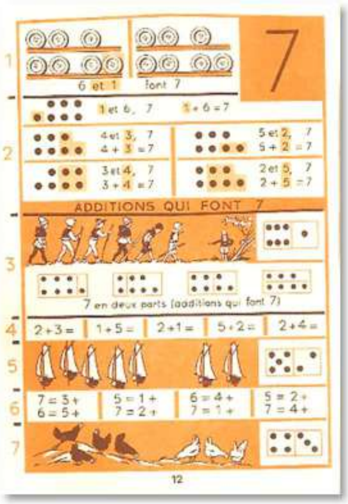
En 1947 le Français **Eugène Delaunay**[71] recommandait ces groupements de points pour le CP[72]. Il proposait l'usage d'une planche avec des clous disposés en carrés sur lesquels pouvaient être fichés 20 jetons bicolores.

Le musée expose une publicité (ci-contre) pour un matériel français des années 1950 appuyé sur les configurations de Lay : « Le secret des groupes », par l'instituteur **J. Jossart**, édité par l'auteur (à Chatelineau) donc sans doute peu diffusé et dont nous ne connaissons pas d'exemplaire.

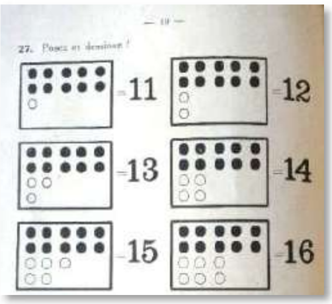


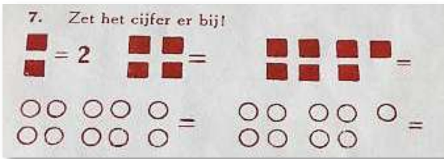
69 *Bericht über den I. Internationalen Kongress für Schulhygiene*, Verlag von J. L. Schrag, 1904. P. 379.
70 DESCOEUDRES Alice, *L'Éducation des enfants anormaux, observations psychologiques et indications pratiques suivies d'un résumé des tests de Binet et Simon*, Neuchâtel : Delachaux et Niestlé, 1916. Plusieurs rééditions et remaniements.
71 BRACHET François, CANAC Henri, DELAUNAY Eugène, *L'Enfant et le nombre, (éléments pour une pédagogie du calcul élémentaire)*, Didier, 1955.
72 DELAUNAY Eugène, « L'initiation au calcul au cours préparatoire », *L'Ecole publique*, décembre 1947.

Bien souvent ces groupements de points devaient composer avec ceux de Born : aussitôt qu'il s'agissait d'autre chose que d'appréhender rapidement un nombre, aussitôt qu'il s'agissait de décomposer les nombres autrement qu'en s'appuyant sur le repère du 4, les groupements de points de Born revenaient subrepticement. Ainsi, alors que **François Brachet**, inspecteur en chef de l'instruction en Indochine se réclamait explicitement [73] des « nombres-constellations » de Lay, dans les faits il s'appuyait aussi sur ceux de Born dans son manuel[74] de 1953 (images ci-dessus, en vitrine) : « Cette séparation par 4, d'abord accusée au début, ira s'atténuant par le double effet de l'entraînement et de l'habitude. *Noter que*, sur certains de nos dessins, cette séparation n'est peut-être pas assez nette ; *nous demandons aux maîtres d'y remédier eux-mêmes* ; ils verront aisément jusqu'à quand et quelle mesure cette séparation par 4 doit être bien tranchée. »[75]



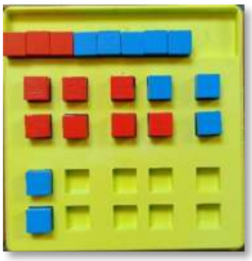
On remarque le même phénomène en Belgique avec le Flamand **Willy Schneider** (1897-1969)[76] qui diffusera aussi les configurations de Lay dans son *Enseignement rationnel des premiers éléments du calcul*[77] et dans les manuels associés comme celui-ci : Willy Schneider, *Langs kunnen naar kennen 1A* (à droite) *et 1B* (à gauche), 1960 (en vitrine).





73 BRACHET, BREANT, BREANT, Mes premiers comptes de 1 à 100 (livret du maître). Écoles maternelles, classes enfantines et cours préparatoires, Paris : Didier, 1953.
74 BRACHET, BREANT, BREANT, Mes premiers comptes de 1 à 100. Initiation progressive au calcul, Paris : Didier, 1953.
75 BRACHET, BREANT, BREANT, Mes premiers comptes de 1 à 100 (livret du maître).
76 Voir à son sujet : H. VAN DAELE, « De betekenis van Willy Schneider voor het lager onderwijs », in: *Persoon en Gemeenschap*, L, 1 (1997-1998), p. 34-41.
77 SCHNEIDER Willy, *L'Enseignement rationnel des premiers éléments du calcul. Guide du maître*,

Le musée expose deux matériels néerlandais :



D'abord une boite trouée selon les configurations de Lay (appelées en néerlandais *Getalbeelden*) : le *Kwadraatraam* distribué par Baert (Pays-Bas, 2022).

Elle représente ici le passage de la dizaine pour 7 + 5.

Ensuite un matériel particulièrement intéressant parce qu'il utilise les deux configurations, de Lay et de Born, en toute connaissance manifeste de leurs avantages réciproques : le *Rekendoos* édité par Die Keure.

Des plaquettes découpées adoptent les configurations de Born tandis que les configurations de Lay sont disposées sur des plaquettes rectangulaires toutes de même longueur. Un ingénieux système de caches translucides (de type Kühnel) facilite le travail de décomposition des nombres. La juxtaposition des deux systèmes tient sans doute au souci de proposer à la fois des figures numériques qui permettent éventuellement d'identifier le plus facilement un nombre (Lay) et des figures numériques qui permettent de composer et décomposer physiquement deux collections-témoins (Born).

En effet, les plaquettes de type Herbinière-Lebert sont les seules collections-témoins organisées de manière non-linéaire qui peuvent représenter chaque quantité comme un tout manipulable : ces collections peuvent être jointes (et disjointes en passant par un échange) pour composer ou décomposer une quantité, sans besoin de déplacer chaque unité et de compter 1 à 1 au risque du numérotage.

IV. Conclusion

L'exposition, au Musée de l'école de Chartres et d'Eure-et-Loir, de matériels d'enseignement élémentaire des mathématiques, a permis de mettre en lumière plusieurs stratégies pour construire les premiers nombres en étudiant leurs relations et de présenter des situations d'apprentissage.

De nombreux concepteurs occidentaux de matériel didactique ont, dès le début du 19e siècle, choisi de représenter géométriquement la relation fondamentale de l'itération de l'unité par des points alignés, parfois matérialisés par des boules ou des cubes.

Cette représentation se heurte à une obstacle pratique : celui de notre capacité à évaluer par un jugement rapide, précis et confiant une collection quelle que soit sa configuration (ce que nous appelons « subitisation » depuis 1949[78]). Les pédagogues du début du XXe siècle pensaient que cette capacité d'évaluation pouvait aller de 3 à 4 voire 5 objets. D'après Fischer (1991), il y a une nette discontinuité de capacité d'évaluation entre 3 et 4 objets alignés[79]. Les élèves en sont donc souvent réduit à compter 1 à 1 au risque de numéroter les objets en récitant la comptine comme un alphabet, sans comprendre les diverses relations internes aux nombres.

Les pédagogues présentés dans cette exposition ont trouvé comme solution de constituer les boules en groupes de 2, 3, 4 ou 5, voire d'empêcher la manipulation des boules une à une pour favoriser la manipulation des collections elles-mêmes en enfilant les boules hors du boulier en barrettes ou en les remplaçant par des cubes regroupés en barres insécables afin de s'appuyer sur l'analogie de la longueur.

Ces stratégies n'empêchant pas entièrement le comptage un à un, des pédagogues optèrent pour l'attribution conventionnelle d'une couleur à chaque quantité et/ou éliminèrent toute séparation entre les unités de base afin de favoriser la découverte des relations entre chaque quantité validée par la comparaison des longueurs, au risque cette fois de rendre plus difficile l'accès aux quantités discrètes pour les plus jeunes ou plus faibles élèves.

---

[78] Kaufman, E. L., Lord, M. W., Reese, T. W., & Volkmann, J. (1949), „The discrimination of visual number", *The American Journal of Psychology, 62*, 498–525. https://doi.org/10.2307/1418556

[79] FISCHER J.P., « Le subitizing et la discontinuité après 3 », In J. Bideaud, C. Meljac & J.P. Fischer (Eds), 1991, *Les chemins du nombre*, 235-258, Lille : Presses Universitaires.

Concernant cette option des couleurs pour les barres et perles ou pour les plaques, rappelons que les attributions de couleurs sont *conventionnelles* (3 n'est pas plus jaune que bleu) et qu'elles peuvent tout au plus symboliser *par convention* telle ou telle relation entre les quantités (doubles et moitiés, relations factorielles...) si on regroupe certaines représentations des nombres par des teintes apparentées.

D'autres pédagogues choisirent de renoncer à l'alignement des unités, au profit d'une organisation dans l'espace qui tient compte de la capacité de subitisation. Ces représentations fondées sur les repères 2, 3, 4 ou 5 (ou sur une combinaison de ces derniers) permettaient de construire chaque représentation d'un nombre à partir d'autres et, par exemple d'évaluer, sans compter un à un, dans les 5 points du dé : 2 et 3 ou 4 et 1.

Certaines de ces représentations manifestent le choix de privilégier des regroupements le plus proche de 3 (limite de subitisation), d'autres mirent en valeur pour chaque représentation de nombre les décompositions les plus aisées ou les plus utiles pour le calcul, d'autres essayèrent de s'approcher au maximum de la rigoureuse représentation géométrique de la suite des nombres entiers (qui est celle des représentations alignées) en s'efforçant de « jamais remanier le précédent groupement pour obtenir le nouveau » (Abbadie).

Un seul type de représentation le permit : celui de Born, connu en France sous le nom d'Herbinière-Lebert, qui représenta systématiquement chaque quantité comme clairement et régulièrement formée à partir des précédentes, permettant ainsi aux élèves de manipuler les collections elles-mêmes pour limiter le comptage[80] 1 à 1 et de valider visuellement un résultat anticipé mentalement (par exemple, pour recouvrir une plaque de 5 je peux mettre bout à bout une plaquette de 3 et une plaquette de 2 ou bien 4 et 1).

A travers cette exposition raisonnée de matériels d'enseignement nous avons voulu éclairer les enjeux, les questions et les stratégies de décomposition-recomposition des nombres adoptées par des pédagogues à travers les âges et les peuples. Ici et maintenant c'est à chaque enseignante, chaque enseignant de trouver comment poursuivre ce travail avec ses élèves.

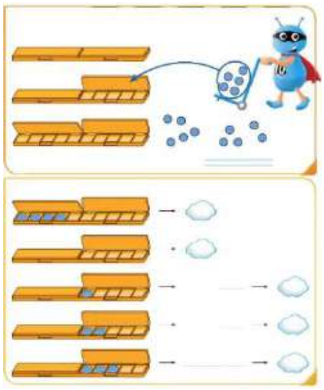
---

[80] Ici encore, même si l'enfant peut plus facilement décomposer chaque représentation d'un nombre qu'avec des objets alignés, certains pédagogues ajoutèrent des couleurs à chaque représentation des 10 premiers nombres pour limiter le comptage 1 à 1.

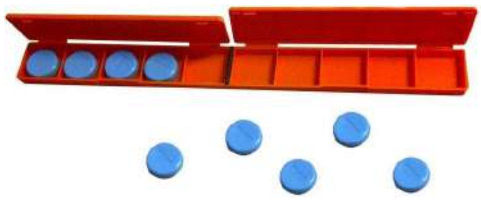
V. Annexe

L'exposition au Musée de l'école de Chartres et d'Eure-et-Loir présentait d'autres types de matériels en lien avec la problématique de la (dé)composition des nombres qu'il conviendrait d'étudier de manière approfondie. Mentionnons particulièrement :

Les **doigts de la main** et leurs symbolisations diverses, représentées ici par la « méthode Havranek ». Editée par le Père Castor, elle s'appuie aussi sur la constellation du dé et sur des cubes alignés. Les grandes lignes de la méthode et son milieu de production ont été décrits par Marc Moyon[81].



Les « **boîtes de Picbille** » conçues par Rémi Brissiaud et éditées par Retz en lien avec le manuel *J'apprends les maths avec Picbille*. Leur intérêt a été mis en lumière par Jean-Paul Fischer[82].



[81] Marc Moyon, « Initiation au calcul et éducation nouvelle : la 'méthode Havránek' au catalogue du Père Castor », *Histemat – Revista de História da Educação Matemática, Sociedade Brasileira de História da Matemática*, 2/3, 2016, pp. 1-24. En ligne.
Marc Moyon , « Initiation au calcul et éducation nouvelle : la 'méthode Havránek' au catalogue du Père Castor », *Grand N*, 97, 2016, pp. 5-20. En ligne.
Marc Moyon, « L'enseignement des mathématiques élémentaires 'à l'enseigne du Père Castor' », *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática / International Journal for Studies in Mathematics Education*, 8/1, 2015, pp. 177-198. En ligne.
[82] Jean-Paul Fischer, « La distinction procédural/déclaratif : une application à l'étude de l'impact d'un "passage du cinq" au CP », in : *Revue française de pédagogie*, volume 122, 1998. Recherches en psychologie de l'éducation. pp. 99-111.
Sur le passage fait par Brissiaud de ses « réglettes avec cache » à ses « boîtes de Picbille », voir Gonzague Jobbé-Duval, « Les "Noums" de Rémi Brissiaud, ancêtres et enjeux », blog A tâtons. En ligne.

Les **matériels de numération mettant en valeur la base 10**[83] et d'autres bases, présentés très partiellement au musée en dehors de l'Initiateur Camescasse : ici le matériel « multibases KML » édité par Nathan et les « blocs Multibases » d'O.C.D.L.

[83] Voir : Gonzague Jobbé-Duval, « Notes sur la genèse des blocs de base 10 », A tâtons. En ligne. [Et une parution possible dans *Au fil des maths* (bulletin de l'APMEP) sous le titre provisoire : « Des vertes vallées de Suisse à l'étagère poussiéreuse de la classe : l'histoire du matériel de numération en base 10 »]